

Folytonos és végtelen?

Mit tanítsunk matematikából?

A minap egy kedves szerkesztő gátlástalan bájjal megkért, hogy írjak recenziót az egyik matematika tankönyvről $n \cdot 2000$ karakter terjedelemben, ahol $n \in \{3; 4; 5\}$, és amikor kérdőre vontam, hogy még az előzőnél elfogyasztott papírt és tintát sem pótolták, esdeklően kérlelt, hogy ne büntessem kétszer, mert már úgylis lefokozták, meg egyébként is jobban teszem, ha lelkiismeretemet nem sírással mosom tisztára, hanem inkább kiírom és ezzel egyben kiírtom magamból a lelki bajaim kórokozóit.

Az egyre újabb és még újabb sorozatok és tankönyvek megpillantásakor a szakmai újdonság iránti lelkendezésemet többnyire megbénítja a piactárgyalkodásra való áttéréssel átítatott agyam és pénztárcám. Beteges gondolataim nyomán feltámadó lelkiismeret-furdalásomat ilyenkor persze igyekszem elcsitítani a „lét határozza meg a tudatot” időnként felmagasztosított, majd szükség esetén elfedett bölcséletével. E lelki konfliktusból „a lét dadog – csak a törvény a tiszta beszéd” konklúziójával menekülök ki, bámulatos merészséggel legyőzve önmagam. Átmeneti-piaci létünk napról napra, óráról órára, percről percre dadog – tisztelet a kivételnek! –, amikor azt magyarázgatjuk önmagunknak, hogy a könyvpiac pelyvéje közt idő-pénz-energia hiányában hogyan vesznek el az értékes magvak, s mint eliminálja a mennyiség a minőséget. A piac ordastörvénye a tiszta beszéd, hiszen hosszú évtizedeken keresztül egy tisztességes nagylexikonnak sem volt helye a könyvpiacra, most pedig egyszerre kettő is megjelenik, amit a *kivétel* méterre adómentesen megvesz, és az csak apró rendellenesség, úgy mond kicsi szépséghiba, hogy az ár-bérfekvés következtében a valaha értelmiséginek kikiáltott pedagógusok könyvespolcára egyegy kötet jó esetben is csak adakozó kedvű rokoni-ismerősi szálon kerülhet.

A tankönyv jó biznissz, magyarázta el egy jónevű amerikai matematikus ismerősöm, aki évente százezer dollár feletti jövedelemre tett szert egy jól megírt és elfogadott egyetemi jegyzete révén, és engem is biztatott, hogy fogjak hasonló vállalkozásba. Ma-

gyarított változata szerint az általános és középiskolás korosztályt kell megcélozni, mert így két legyet ütve egy csapásra, kihasználhatom mind a tömeges méretben rejlő lehetőségeket, mind a matematika örökérvényű, sokszor leírt objektív igazságainak közvetítéséből adódó előnyöket. A kapott jó tanácsért érzett hálám jeléül próbáltam megértetni vele, hogy átmeneti állapotunkban e jó biznisszben az osztozkodásnál a kiadónyomda-terjesztő deficités triumvirátus úgy elkönyveli a hasznot, hogy abból szellemi szülőanyaként nem sokat látok, egyébként meg valódi anyaként fel kell nevelnem lányaimat addig is, amíg a tartósított „átmeneti” állapot pillanatnyilag időserű zavarosából fiktív művem ragyogó fénye napvilágra tör és a szokásos intrikákat elhomályosítva legalább erkölcsi honoráriumot hozna. Ezért praktikusabb, ha a tankönyvpiachoz a számomra egyetlen alternatívaként kínálgató szellemi terjesztő, azaz a tanár státuszában csatlakozom, talán így is kivérthetők némi megbecsülést magamnak a jövő nemzedékénél, s bár ebből sem lehet megélni, csak vegetálni, de legfeljebb megint elűzöm uramat egy másik pályára legalább tripla bérért.

A tankönyvpiac sokszínű és -szintű, mert a paradox helyzet ellenére mindig akadnak olyan újszülöttek, akik megszállottságból, beteges vállalkozói szellemből, úri allúrból avagy előttem rejtett okból kifolyólag szállítanak a kiadónak „szellemi” termékeket. A gyakorló tanár izlésének megfelelően választ a bőség kosarából, a szülő mellényzsebből vagy aprópénzzel kitömött bugyellárisából fizet, a diák meg a

maga módján alkalmazkodik a kiszabott úthoz. Szabadság van, ez már a Kánaán – ne tovább! Inkább álljunk meg és csodálunkat egy picit feledve, mélázunk el azon, hogy a piacgazdálkodás nevében úgy jutottunk el az édes szabadság emez állapotába, hogy közben figyelmen kívül hagyjuk a piac ordastörvényeit is. A kiadók, a nyomdák, a terjesztők osztódtak és szaporodtak, no meg áraitak emelték, hogy a felaprózódó deficitet jobban el tudják viselni, miközben a vásárlói szerepre kényszerülő szülőknél nagy része önként és dalolva az elszegényedés útjára lépett, hogy könnyebben finanszírozhassa utódai tanulását.

E piaci folyamathoz a tanárok többsége vergődve vagy elnéző mosollyal hallgatólagosan asszisztált, sőt némelyek szellemi erőfeszítésükkel tevékeny részt is vállaltak benne. Az évente elfogyasztandó könyvmennyiséget növelni lehet, ha egyszer használatos, ún. munkáltató tankönyveket írunk, vagy a kiadó az alsó tagozatosok számára a tankönyvből egy kis tördelési munkával minden évben egy-egy újabb változatot készít és ezzel kielégül a legfőbb piaci törvény: a legkisebb energiával a legnagyobb deficitre törekvés elve. Félreértés ne essék, de a széles választék, a munkatankönyv mellett szóló „jó, mert...” típusú értő érveket becsülöm, de csak akkor fogadom el, amennyiben a *mert* kötőszót *ha* szócskával helyettesítve az utána következő feltételrendszer nem helyi érdekek, hanem a rendszerszintű, ún. globális érdekek optimalizálását fogalmazzák meg. A felvázolt kép lehet bár némileg groteszk, de hátborzongató arra gondolni, hogy közben a papírt megszenstegtelenítve, a papírgyárakat egyre hízalva, az erdőket kiirtva fulladozunk az egyre szennyezettebb levegőtől és a ránk hulló szemétkosár-információktól.

A középiskolai matematika-tankönyvek dicséretesen tisztelik a papírt, többször felhasználhatóak, a matematika nyelvezetéből adódóan is tömörebb megfogalmazásúak. Némileg kivétel ez alól *Mihajlik Iván Algebra és függvények* című középiskolai matematikai alaptankönyve, amelyben a szerkesztési-tördelési munka túlzottan sok üres helyet hagyott az áttekinthetőség nevében.

(A 113. oldalon például a lap közepén értelemzavaróan megszakad a fejezet és csak a következő oldalon folytatódik.) Az áttekinthetőség persze fontos dolog, amit e könyvben a zöld-piros színek alkalmazásával akartak az alkotók elősegíteni, de ez zavarja puritán szememet. E véleményem ugyan szubjektív, de az biztos, hogy a függvénygrafikonok színezése nem feltétlenül emeli az ábratechnikai színvonalat. A WinWord által használt Microsoft Graph, az Excel... stb. szoftverek grafikszerkesztő programjait felszínesen áttekinthető is meggyőződhettünk arról, hogy fekete-fehér alapon is rendkívül beszédes függvényábrázolások készíthetők; és nem kell attól tartani, hogy a nyomdatechnika kisördöge a különböző színű, jelen esetben zöld-piros színeket egy kicsit elcsúsztatva az ábrát pontatlanná teszi. A zöld-piros színválasztás is zavaró, amit a 19. századtól a színegyüttesek preferáltságára végzett tudományos igényű statisztikus vizsgálatok is alátámasztanak. E kísérletek egyik tanulsága szerint az egyes színek kapcsolatok megítélésében ugyan lélektani, életkori és kulturális sajátosságok is szerepet játszanak, de az empirikus tapasztalatok alapján a zöld-piros színár a harmóniaérzet szempontjából a legkevésbé megfelelő. Kicsit gondosabb szerkesztői-tördelési munkával e formai hiányosságok kiküszöbölhetőek lettek volna az egyébként jól olvasható kötetben.

A tankönyv tartalmát didaktikai, szakmódszertani, szaktudományi szempontból megítélni meglehetősen összetett feladat. Matematika-tankönyvet írni tulajdonképpen könnyű feladat, hiszen koncepcióknak és ízlésünknek megfelelően régebbi és újabb tankönyvekben garázdálkodhatunk – akár ollóval is, tudva, hogy művünk nem lesz tökéletes, hiszen minden tankönyv jobbítható, egyes fejezetei másképp is felépíthetők, megfogalmazásai csiszolhatók, példaanyaga érdekesebbre cserélhető stb. Eredeti matematika-tankönyvet írni pedig látzólag lehetetlen, hiszen számtalan tanár, matematikus és szerző bölcsessége nagyjából már kimerítette a lehetőségek tárházát, jóllehet eddigi tanítási tapasztalatai alapján Mihajlik Iván mégis kísérletet tett a tárgyalási mód megújítására, illetve felújítására.

A tankönyvcsaládok jelentős része (*Hajnal Imre, Czapáry Endre, Korányi Erzsébet*) a tantervi időbeosztáshoz igazodva sorakoztatja fel az egyes témaköröket, mintegy osztályokra lebontva a tananyagot, ami részben ugyan segítséget jelent, részben azonban hátráltatja a tanítási-tanulási folyamatot. Mihajlik Iván középiskolai matematikai alaptankönyv-sorozata módszertanában azt az utat követi, hogy egy-egy tankönyv egy-egy nagyobb témakört tartalmaz, nem feltétlenül követve a tanterv időbeosztását. Ennek aztán egyenes következménye többek között az is, hogy egy évfolyamon több könyvet is használni kell, hiszen az iskolai oktatásban az ismeretek elsajátítása, elmélyítése érdekében elengedhetetlen a spirális felépítés. Az *Alaptankönyv* két részből áll az alábbi felépítésben:

| | | | |
|-----|-----------------------|--------|-----------------------|
| I. | Algebra és függvények | I. A) | Algebra és függvények |
| | | I. B) | Trigonometria |
| | | I. C) | Analízis |
| II. | Geometria | II. A) | Síkgeometria |
| | | II. B) | Vektorok |
| | | II. C) | Koordináta-geometria |
| | | II. D) | Térgeometria |

A szerző tervei között szerepel a *Kombinatorika*, a *Valószínűségszámítás* és a *Komplex számok* című tankönyvek megírása is.

Az *Algebra és függvények* kötet előszavában – amely nem több a tanárok, matematikusok provokálásánál, ezért nem is igen kaphatna helyet egy elsősorban tanulók számára készített tankönyvben – a szerző leszögezi, hogy könyvének „elsődleges célja a középiskolai matematika legalapvetőbb ismereteinek közérthető, de ugyanakkor következetes tárgyalása”. E kitűzött cél látszólag nemes még akkor is, ha nem sikerül maradéktalanul megvalósítani, de nekem mégis fenntartásaim vannak vele szemben. Ellenérzésem nemcsak e könyvnek szól, hanem saját mindennapos matematikatanári tevékenységemnek is, hiszen óráról órára tovább erősítem azt a közfelfogást, hogy a

matematika kortól, időtől független általános, örökérvényű igazságok tárháza, miközben tudom, hogy e tudomány is állandóan fejlődik, matematikai ismereteink az elmúlt évszázadban is jelentős változáson mentek keresztül. A legutóbbi két évszázad eredményei azonban a középiskolai tananyagban nem kaptak helyet – az e szempontból kivételes helyzetű halmaz, vektor és logika fejezetről pedig jobb nem beszélni –, így valóban örökérvényű, ámde elavult ismeretek közvetítői vagyunk. Árnyalt képet nyerhetünk erről, ha magunk elé tesszünk egy-egy tankönyvsorozatot matematikából, irodalomból, történelemből, biológiából, fizikából, kémiából stb. és szétvagdoszuk őket, két kupacba hordva mondjuk az 1800 előtti és az 1800 utáni korból, korról szóló ismereteket. Az elénk tároló látvány lenyűgözően bizonyítja, hogy a matematika tananyag

mennyire avított. Közismert a publikációk megjelenésének tudománymetodológiai vizsgálati eredménye, miszerint egy-egy tanulmány megjelentetése átlagosan tíz hónapot, a matematika esetében negyvenöt hónapot igényel. Körülbelül ilyen sűrűséggel jelennek meg matematikából az alternatív tankönyvsorozatok is, melyekből rendületlenül hiányoznak a „modernebb” korok eredményei és gondolatai. A matematika tananyagban alapvetően csak végtelen, sőt folytonos struktúrák szerepelnek, melyeknek központi szerepük van a közelítés, határérték jól használható fogalmának kialakításában, miközben elsikkadnak a véges, diszkrét struktúrák, melyeknek ismerete feltétlenül szükséges a korunkat uraló új tudományágak (informatika, rendszerszervezés stb.) megértéséhez, sőt hétköznapi létünket is ilyenek

hatják át. Az az érzésem, hogy a matematika mint szaktantárgy függetlenedett a szaktudománytól és sajátos belső *l'art pour l'art* öntörvényének megfelelően fejlődik, azaz azt tanítjuk, amit nekünk is tanítottak, legfeljebb a gyakorlati igények nyomásának engedve időnként kiselejtezzük néhány használhatatlannak ítélt ismeretet. Mihajlik Iván helyenként még a NAT-ot is túllícitálva vállalja fel e koncepciót. Az előszóban vázolt eszme-futtatásával a szerző hitelesíteni kívánja a függvény fogalmának általa elvégzett csonkolását és mind didaktikai, mind gyakorlati oldalról érvelve próbál meggyőzni bennünket arról, hogy határoljuk el magunkat a függvény modern matematikai felfogásától és a „számfüggvények” hozzárendelési szabályára redukáljuk azt. Érvéleése számomra elfogadhatatlan, mert e multidiszciplináris fogalom sokkal fontosabb mind gyakorlati, mind gondolkodásbeli alkalmazását tekintve, semmint hogy egy elegáns kifejezéssel egyszerűen figyelemelterelő pazarlásnak minősítsük és lényegét a számfüggvények körében időtállóan bizonyult hozzárendelési szabályokra redukáljuk. Ennek praktikus volta ellen szól, hogy az iskolát leszámítva meglehetősen ritkán találkozunk $y=f(x)$ szabályokkal a hétköznapi életben. A matematikai képletek, mint hozzárendelési szabályok fetiszizálása tudományoskodó burokokba rejti az ismereteket a halandók elől. A műszaki szakirodalomra vetett felszínes pillantás is meggyőzhet bennünket arról, hogy a szakemberek előszere-tettel alkalmazzák a „meglehetősen körülményes és pontatlan” grafikus módszereket.

A függvény fogalma sokkal általánosabb és teljesen függetleníthető, a nyilván informatikai ihletésű „változós kifejezések” névre keresztelt képlettől, sőt alapvetően a középiskolai matematika anyagban éppen a függvények és a képletek struktúrájának egymás közötti megfeleltetéséről van szó és ennek kapcsán vetődnek fel a problémák. Az egyetemi tananyagban külön stúdiumokat szentelnek például a polinomok és a polinomfüggvények külön-külön történő tárgyalásának, majd ezek egymásnak történő megfeleltetésének. A szerző függvény-sorokra vonatkozó érve is ön-

ellentmondásokkal terhelt, amire a pontonkénti és egyenletes konvergencia közötti kapcsolat és különbség taglalása egyértelműen rámutat, de ez messze esik a középiskolai tananyagtól. Summa summarum: ne írjunk le matematikánk könyvben olyan alapvetően hibás megállapítást, hogy „a függvény értéke és a függvény egy és ugyanaz a fogalom”, még akkor sem, ha ezt szeretnénk elhitetni! A jelöléseken lehet vitatkozni; számomra rokonszenvesebb a szerző által körülményesnek és ezért kerülendőnek tartott jelölési mód, mert az hívebben tükrözi a függvény valódi fogalmát, de ez csak ízlés kérdése. Didaktikai szempontból fontosabbnak tartom, hogy az anyag tárgyalása során a definícióknak, tételeknek és bizonyításuknak nincs elkülönített megjelenítése, persze ez nem tehető meg, ha a tételt, a definíciót ki sem mondjuk, csak körülményesen, illusztrációs példával keverve körülírjuk, mint többek között a matematikai indukció névre keresztelt teljes indukció esetében.

Az egyenlet mint logikai függvény definícióját is igyekszik a szerző kivonni a matematikai logika fennhatósága alól. E törekvés dicséretes, ha a matematikai logikának a tananyagban betöltött szerepére gondolunk, hiszen az meglehetősen üres és formális, ezért erre építeni a középiskolai tananyagban központi szerepet betöltő egyenlet fogalmát valóban hiba lenne. A tankönyvben éppen ezért az előkészítő *Logika* fejezetben az alapvető célkitűzés a feltétel és következmény, a „ha..., akkor...” alakú állítások vizsgálata. A negáció, a konjunkció, valamint az összekötő és szétválasztó diszjunkció teljes formális bevezetésére mégis sor kerül anélkül, hogy e logikai műveletek akár csak magyarul is megfogalmazódnának. A diszjunkcióra az igazságtáblázat mellett csak a következő mondatok vonatkoznak: „Vagy Petinek van tolla, vagy Gyurinak ceruzája, vagy Petinek van tolla és Gyurinak van ceruzája. Az ilyen típusú hozzárendelést összekötő diszjunkciónak, vagy – egyszerűen diszjunkciónak – nevezzük. Jelölése: v . Az A és B állítások diszjunkciója a következőképpen írható fel: $A \vee B$. Az $A \vee B$ akkor és csak ak-

kor hamis, ha mind A , mind B hamis, minden egyéb esetben az $A \vee B$ igaz.”

Ennyi mindent tudni a diszjunkcióról felesleges, mert ebből még az sem derül ki, amit Hajnal Imre *Matematikai fogalmak, tételek* című, középiskolások számára készült kézikönyvében közöl: „A diszjunkció két egyszerű kijelentést a *vagy* kötőszóval kapcsolt össze.” A szóban forgó tankönyvben egyébként is több helyen hiányolom az ehhez hasonló, tömör, egyszerű, világos, közérthető megfogalmazásokat.

A logikai alapműveltek formális tárgyalását választva nem értem, hogy miért maradnak ki a kérdéses tankönyvből az univerzális és egzisztenciális kvantorok jelölései. Az indirekt bizonyítási elv fontos ugyan, de az állítás és tagadásának megfogalmazásától mintha idegenkednénk, pedig ez biztosan alapvető jelentőségű a hétköznapi gondolkodásban is, hiszen a nyelvi ellentétpárok és a logikai ellentétek nem esnek egybe. A fekete-fehér szemléletet így tudatosabban is színesíteni lehetne. Az indirekt bizonyítás tankönyvi tárgyalása is nélkülözi ezt a lépést és a választott bemutató példa ráadásul egy „akkor és csak akkor” tétel, azok közül is a Thalész-tétel, amely a bizonyítás bonyolultságánál fogva nem tartozik a könnyen megérthető-tanulható tételek körébe. A bevezetett formális logikai jelölések használata még a matematikai vénával rendelkező tanulók számára sem teszi érthetővé az indirekt bizonyítási módszer elvét, melyet szintén nem fogalmaz meg a szerző.

Személy szerint én nagy örömmel üdvözlök egy olyan matematika-tankönyvet, amely nem a matematikai logika bevezető fogalmainak formális, absztrakt jelölésekben gazdag tárházát próbálná elsajátíttatni, hanem a hétköznapi életben is fontos kapcsolatokra, a leggyakrabban előforduló relációkra helyezné a hangsúlyt.

Így például nem merülne ki az ekvivalencia fogalma az „akkor és csak akkor” állításforma megismerésében, hanem sor kerülne az ekvivalencia, mint reláció következtében mindenütt alkalmazott osztályozási, skatulyázási, kategorizálási elvnek, az általános helyettesítési módszernek és korlátainak a megismerésére is. Ezen az úton

haladva természetes módon adódna a rendezések, rendezési relációk, azok fajtáinak, ábrázolási lehetőségeinek áttekintése is. Természetesen mindettől messze vagyunk, a matematikaoktatás a különböző relációk átfogóbb ismertetésétől jelenleg elhatárolja magát, mintha ez nem is matematika lenne, hiszen a végtelen-folytonos szemlélethez nem kapcsolódik közvetlenül.

A tanulók számára a fogalmakat, módszereket specializálva, azaz tartalmuk jelentős részétől megfosztva az anyag elsajátítása már lényegesen kevesebb gondot okoz. Alaposan meg kell fontolnunk, hogy mikor mennyire általánosítunk vagy specializálunk. Aki sokat markol, az keveset fog. A túlzott, nem kellően megalapozott általánosításokkal az embereket könnyen elidegeníthetjük a matematikától, a túlzott specializációval pedig – használhatatlansága miatt – érdektelenné válhat a tanított anyag. Mihajlik Iván tudatosan felvállalja ezt az igazságot és a tananyag egyfajta közérthetőbb, minimumra törekvő felépítését nyújtja a „matematikából gyengébb” tanulóknak. A diákok így eredményesebben tudnak dolgozni, könnyebben sikerélményhez jutnak. Ez pedig az egyik kulcskérdése matematikatanításunknak. Az algebra és a függvényeket tárgyaló fejezetek ennek szellemében íródtak, némi formai és nyelvi csiszolás után néhány szaktárgyi kiegészítéssel e feladatra jól felhasználhatóvá válhatnak. A matematikai ismeretek rendezését megkönnyíti az alapfogalmak, definíciók, axiómák, tételek közötti logikai rend megértése, s ez szükségszerű is, hisz a különböző témakörök mindegyike ezt a rendet követve épül fel, ezért javaslom a könyv átdolgozásakor a definícióknak és a tételeknek legalább a jelölés szintjén történő megkülönböztetését.

E kötet piaci ára 490,- Ft, ami a mai gazdasági helyzetben egy nagy példányszámra jogot formáló matematika-tankönyv esetében szülői szempontból igen magas. Hiszen a többi tantárgyhoz szükséges tankönyvet is hozzászámítva bizony a családok számára rendkívül megterhelő összeg adódik így ki.

Varsics Zita