ző interdiszciplináris paradigmák, a modellalkotási tevékenység és a rendszerelméleti szintű gondolkodásmód" konkrét megvalósítását, hiszen ma csak ezek képezhetik tudományos alapját egy egységesítő törekvésnek. A másik elvi jellegű problémának azt érzem, hogy a természettudományok integrálásakor a műszaki tudományokról sem szabad megfeledkezni, hiszen ezek nélkül ugyanolyan típusú problémák vetődnek fel, mint a bármelyik szűk szaktudományt tükröző tantárgy tanítása során. A témakör mérete és mélysége miatt ez nyilvánvalóan túlzott elvárás lenne e tankönyvtől, ugyanakkor e megjegyzés kikívánkozott belőlem, ha már a „természettudományok kapcsolatrendszerének felvázolására tett kísérletről" van szó.

E könyv alternatív tankönyvként való alkalmazása, mint kiegészítőforrás, segédeszköz rendkívül hasznos lehet, ugyanakkor erre alapozni a természettudományok tanítását napjainkban nagy hiba lenne. E véleményemet arra alapozom, hogy a mai érettségi-felvételi rendszerben hátrányba kerülnek azok a tanulók, akiket nem itattak át a szaktudományi specifikumok meglehetősen mély, ám sokszor formális ismeretei, hiszen e vizsgarendszerek követelményei éppen ezekhez igazodnak. A meglevő vizsgarendszerek előnybe részesítik azokat, akik ha szűklátókörűen is, de rutinosan oldanak meg speciális, sokszor nyakatekert, a valóságtól a szaktudományi zsargonba asszimilálódott feladatokat, nem mérik és értékelik a valóságot jobban rendszerben látók, összefüggéseit mélyebben értők tudását, képességét. A természettudományok tanításában sok helyütt realizálódik ez a deformált szemlélet, ami számos diákot ugyanúgy eltaszít a fizikától, a kémiától ...stb., mint a matematikától. A követelményrendszer említett problémái miatt nyugodt lelkiismerettel csak kiegészítő forrásként, illetve segédeszközként való használatát javasolhatom azok számára, akiknek vizsgakövetelményeket kell teljesíteniük, ugyanakkor e könyv meg tudja ragadni még azoknak az érdeklődését is, akik eddig távol tartották maguktól az „empírikus tudományoktól". A könyv széles körben tarthat igényt érdeklődésre, ezért meglepő számomra a könyv borsos ára – 900 Ft –, ami feltehetőleg az indokolatlanul alacsony példányszámnak tudható be.

Both Mária – Csorba F. László: Tudománytörténet. Gondolat, Budapest, 1993.

VARSICS ZITA

Matematika tehetséggondozáshoz

Urbán János 15 éves korú tanulók, elsős gimnazisták számára állított össze egy nyolc foglalkozásra tagolt feladatsorozatot. „A foglalkozások célja a tanult anyag elmélyítése, a versenyekre, a KÖMAL-gyakorlatok, feladatok megoldására való felkészítés volt."

Az egyes foglalkozások témakörei:

1. Számelmélet (prímszámok, oszthatóság, számelméleti függvények)
2. Számelmélet, függvények, geometria
3. Kombinatorika, számsorozatok
4. Algebra és geometria, ismétlő feladatok
5. Számtani és mértani közép, szélsőérték-feladatok, egy kis geometria, véges halmazok
6. Valószínűségszámítás, kongruenciák, ismétlő feladatok,
7. Gráfokról, egy kis valószínűségszámítás és geometria, önálló olvasmány
8. Vegyes feladatok, versenyfeladatok

Az egyes foglalkozások témakörei lehetővé teszik azt a változatosságot, amely az érdeklődés fenntartásához és fokozásához elengedhetetlenül szükséges, de ennél fontosabb az, hogy a látszólag különálló, illetve annak tetsző témakörök közötti mély kapcsolatok megvilágosodhatnak a tanulók számára.

A könyv címében szereplő „+” jel első ránézésre egy kicsit szokatlan. A legtriviálisabb értelmezése talán az, hogy ebben az összeállításban a rutinfeladatoknál nehezebbek szerepelnek, esetleg eddig ismeretlen módszerekkel, megoldási ötletekkel találkozhatnak a tanulók. Ez mind igaz, de ebben az esetben ennél sokkal többről is szó van. Véleményem szerint a témakörök „megkomponáltsága”, az egyes feladatok mögött „megbúvó” matematikai háttér teheti igazán élvezetessé és élményszerűvé a példatár használatát diák és tanár számára egyaránt.

Néhány példa

2. foglalkozás, 8. feladat:

„Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket:

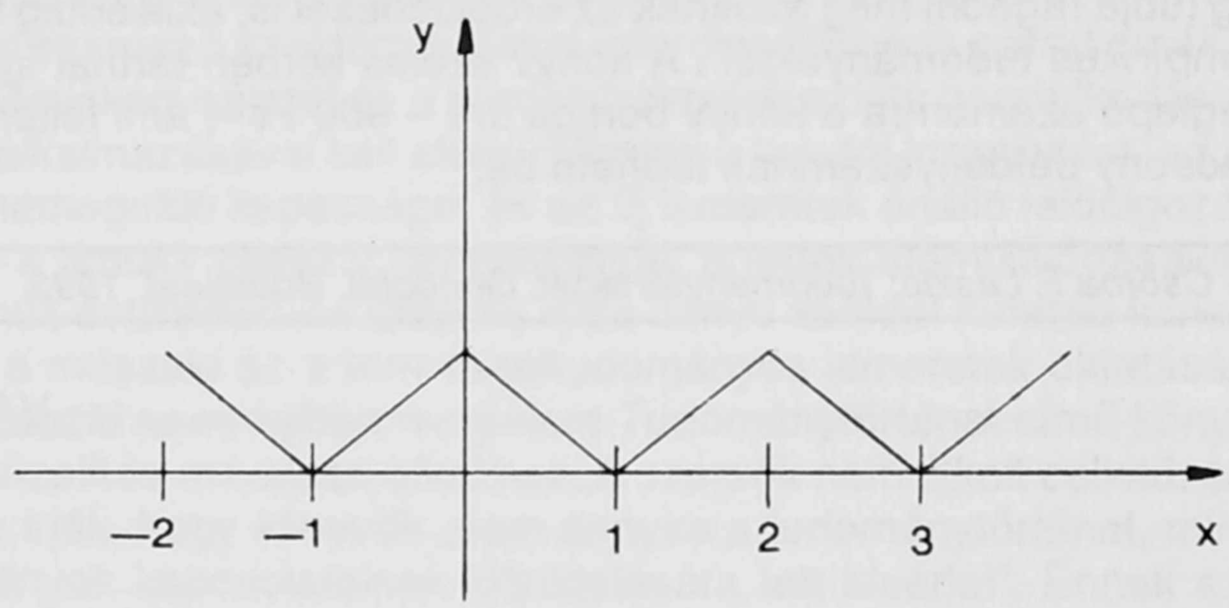
a) $x \to |x+3| - |x-1|$

b) $x \to ||x| - 4|$

c) $x \to ||||x| - 4| - 2| - 1|$

d) $x \to |x^2 - x|$

A b) és c) feladat elég izgalmas. A b) feladat megoldásakor szerzett tapasztalatok jól felhasználhatók a c) feladat megoldásakor. Az $x \to ||||x| - 4| - 2| - 1|$ hozzárendelési utasítással megadott függvény első ránézésre dermesztő hatású, de grafikonja „elég szép”.



Sok érdekes tulajdonság olvasható le a grafikonról: korlátosság, helyi és abszolút szélsőértékek, párosság, periodicitás, monotonitási intervallumok. Ez a függvény azonban a későbbiek során is „jó szolgálatot tehet”, hiszen a függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, de egyetlen egész helyen sem differenciálható, ugyanakkor minden egész helyen léteznek a féloldali differenciálhányadosok, csak ezek nem egyenlők.

3. foglalkozás, 19. feladat:

„Adott egy n lépcsőfokból álló lépcső. Hányféleképpen tudunk ezen felmenni, ha egyszerre csak 1 vagy 2 lépcsőfokot léphetünk? Először n = 2, 3, 4, 5 esetére gondoljuk végig a megoldást!”

A konkrét esetek tanulmányozása elvezet az általános eset megoldásához, s közben szinte észrevétlenül mintegy „felkészülünk” a Fibonacci-sorozat „fogadására”.

Hasonló előkészületnek tekinthető *e foglalkozás 20. feladata is.* „Egy ötemeletes házat hányféleképpen tudunk kifesteni, ha minden emeletet fehérre vagy zöldre festünk, de két fehér emelet nem kerülhet egymás fölé? Oldjuk meg a feladatot n emeletes házra is!”

A foglalkozás záró feladata pedig már a Fibonacci-sorozat és a Pascal-háromszög kapcsolatát vizsgálja.

4. foglalkozás 9. és 10. feladat:

A 9. feladatban igazolni és általánosítani kell az alábbi egyenlőtlenséget:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{100^2}<2$$

A megoldás során felhasználhatók a 3. foglalkozás 1/c feladata során szerzett tapasztalatok. A feladat általánosítása az e témakörrel ismerkedők számára elég meglepő, hiszen arra az eredményre jutunk, hogy az

$$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

általános tagú sorozat növekvő, $a_1 = 1$, és a sorozat minden tagja mégis kisebb 2-nél. Később majd az is kiderül egyesek számára, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{\Pi^2}{6}$$

vagy másképp fogalmazva, a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ végtelen sor konvergens és összege $\frac{\Pi^2}{6}$

A 10. feladatban igazolni és általánosítani kell az alábbi egyenlőtlenséget:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}$$

Tulajdonképpen ebben az esetben sem önmagában érdekes a feladat. Az általánosítás során megjelenik a harmonikus sor 2n-edik és n-edik részletösszege. Ennek kapcsán össze lehet hasonlítani a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \textit{és a} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{sorozatot.}$$

Az

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

egyenlőség felhasználásával a későbbiek során – az integrálközelítő összegek felhasználásával – az is kiderül, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$$

sor konvergens és összege ln 2.

Sorolhatnánk még szép példákat és különleges megoldási ötleteket, ehelyett csupán egy kedves dologra hívom fel a figyelmet. A szerző több helyen is bevallja, hogy „ a gyerekektől tanultam a következő bizonyítást".

Az elmondottakból következik, hogy a kitűzött feladatok megoldása több-kevesebb erőfeszítést kíván, de megéri a fáradság, hiszen ebben az esetben is igaz, hogy a „tudomány gyökere keserű, gyümölcse pedig gyönyörűséges".

Urbán János: Matek+ 15 éveseknek. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1993.

BONIFERT DOMONKOS