Feladatok matematikai tehetséggondozáshoz

SZIGETI BÉLÁNÉ

A legjobbakkal való foglalkozás tervezése, megszervezése és rendszeres vezetése az oktatómunka egyik legszebb és legfontosabb feladata. Az alábbiakban a teljességre törekvés igénye nélkül a Cauchy-féle egyenlőtlenséggel kapcsolatos, 4. osztályos szakkörön, egyetemi előkészítőn – vagy ezek hiányában – iskolai programozott pontversenyen felhasználható feladatsorozatot mutatok be. Differenciált foglalkozások során a tanulók megfelelően választott feladatok megoldásával eljuthatnak az egyenlőtlenség különböző általánosításához, bizonyítási igényük és eszköztáruk fejlődik.

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazása

A tanulók jól ismerik a két pozitív szám számtani és mértani közepére vonatkozó összefüggést, nevezetesen, hogy:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

Ennek az összefüggésnek a birtokában számos, látszólag távoli területhez tartozó feladat gyorsan és elegánsan megoldható.

1.a. Azonos kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?
1.b. Azonos területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

Megoldás: Ha a és b a téglalap oldalai, a Cauchy-féle tétel alkalmazásával

a)
$$T = a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{16}$$

illetve b)
$$K = 2(a+b) \geq \sqrt{a \cdot b} = 4\sqrt{T}$$

ahol T a téglalap területe és K a kerülete, a=b esetében a téglalap négyzet.

A feladat szemléletes és egzakt megoldása a tanulók többsége által ismert, a későbbiekben egyes sejtéseket ennek alapján fogalmazunk meg, ezért kerül bevezetőként a feladatsor elejére.

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely α hegyesszögre

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 2$$

Megoldás:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

helyettesítéssel

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha} = 2$$

megjegyzés: egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$$

azaz

$$\alpha = 45°$$

3. *Legyen* $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 2$
Igazolja, hogy

$$\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right) \ge 9$$

Megoldás

$$\frac{x+y}{2} = 1 \quad \text{és} \quad \sqrt{xy} \le 1 \quad \text{ezért} \quad xy \le 1, \quad \text{így} \quad \frac{1}{xy} \ge 1$$

Elég igazolni, hogy

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{x \cdot y} \ge 5$$

$$2\,\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy} \ge 5$$

Ez az egyenlőtlenség $x + y = 2$ és $\frac{1}{xy} \ge xy$ miatt minden $x,y \in R^+$-ra teljesül.

4. *Szorozzuk meg a téglatest egyes oldallapjainak a területét a kerületeikkel. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett hat mennyiség összege legalább akkora, mint a térfogat 24-szerese. (OTV 1951. 2. ford.)*
Megoldás: (I.)
A téglatest éleit a,b,c-vel jelölve a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$2\,ab \cdot 2(a+b)+2ac \cdot 2(a+c)+2bc \cdot 2(b+c) \ge 24\,abc$$

$$\text{azaz } 4(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b) \ge 24\,abc$$

4 abc-vel végigosztva:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \ge 6$$

Egy pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, (ez a 2. feladatból is kitűnik) egyenlőtlenségünkben pedig három számnak és reciprokának összege szerepel.
A feladat egyszerűbben is megoldható, ha Cauchy tételét tetszőleges n pozitív természetes számra általánosítjuk.
1.a. és 1. b. térbeli megfogalmazásáról szemléletes, illetve a szélsőérték-számítás segítségével igazolt ismeretekkel rendelkeznek a tanulók.
Tétel Legyenek $a_1, a_2 \ldots a_n$ pozitív számok, ekkor:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

A *bizonyítást* teljes indukcióval végezzük.
Jelöljük $a_1, a_2, \ldots a_n$ számtani közepét A-val ($a_i \in R^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Célszerű jelöléssel és permutációval elérhető, hogy

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$$

Ekkor a számtani közepére teljesül, hogy:

$$a_1 \le A \le a_n$$

Mivel egyenlő adatok esetén a számtani és mértani közép egyenlősége nyilvánvaló, tegyük fel, hogy az adatok között van két különböző (pl. a_1 és a_n)

$$A(a_1 + a_n - A) - a_1a_n = (A - a_1)(a_n - A)$$

$$a_1 + a_n - A > \frac{a_1 \cdot a_n}{A}$$

tehát a bal oldal pozitív.
A bizonyítandó állítás n=2-re igaz.

Tekintsük az $a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_1+a_n-A$ nem-negatív számok számtani közepét:

$$\frac{a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_1+a_n-A}{n-1}=\frac{nA-A}{n-1}=A$$

Az indukciós feltevés értelmében:

$$A^{n-1}\geq a_2\cdot a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A)>a_2\cdot a_3\cdots a_{n-1}\frac{a_1\cdot a_n}{A}$$

azaz

$$A^{n-1}\geq a_2\cdot a_3\cdots a_{n-1}\cdot\frac{a_1\cdot a_n}{A}$$

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n\geq a_1\cdot a_2\cdots a_n$$

A bebizonyított tétel birtokában érdemes visszatérnünk a 4. feladathoz.
Megoldás: (II.) A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán a^2b, a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b számtani, jobb oldalán ugyanezek mértani közepe áll. Kerületre adandó becslésnél is használhatjuk a számtani és mértani közepek közötti összefüggést.

5. Egy háromszögről tudjuk, hogy ab + bc + ca = 12 (a,b és c a háromszög oldalai). Milyen határok közé eshet a háromszög kerülete? (KÖMAL 1989. 39. évf. F.2735)

Megoldás: Legyen $k = a + b + c$!

$$\left(\frac{k}{3}\right)^2=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$k^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=3(k^2-2(ab+bc+ca))=3k^2-72$$

ebből (1)

$$k^2\geq 36 \qquad k\geq 6$$

az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$a=b=c=2$$

A maximum meghatározásához tegyük fel, hogy

$$a>0;\ b\geq c\geq 0 \qquad \text{és} \qquad a\geq b\geq c$$

a háromszög-egyenlőtlenségét felhasználva majd a-val szorozva:

$$a^2\leq ab+ac\leq ab+ac+bc=12 \tag{2}$$

$$b\geq c\geq 0 \quad \text{miatt}$$

$$c^2\leq bc$$

$$b^2\leq ac$$

Így (3)

$$b^2+c^2\leq ab+bc\leq ab+ac+bc=12$$

(3) és (2) összegét képezve:

$$a^2+b^2+c^2\leq 24, \text{ azaz}$$

$$k^2-2(ab+ac+bc)\leq 24$$

$$k^2-24\leq 24 \tag{4}$$

$$k^2\leq 48$$

$$k\leq 4\cdot\sqrt{3}$$

(1) és (4) összevetéséből kapjuk a

$$6 \le k \le 4 \cdot \sqrt{3}$$

eredményt.

6. Legyenek α, β, γ egy háromszög radiánban mért szögei. Igazoljuk, hogy

$$27(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \le 8\Pi^3$$

Megoldás

$$27(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \le \left(\frac{3(\alpha+\beta)+3(\beta+\gamma)+3(\gamma+\alpha)}{3}\right)^3$$

$\alpha+\beta+\gamma=\Pi$ -t felhasználva $[2(\alpha+\beta+\gamma)]^3 = 8\Pi^3$

A köbre emelést elvégezve és 3^3-mal szorozva a bizonyítandó állítást kapjuk.

$$27(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \le 8\Pi^3$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha „a" és „b" természetes számok, akkor

$$\left(\frac{a+b}{b+1}\right)^{b+1} \ge \left(\frac{a}{b}\right)^b$$

(OTV 1967 2. ford.)

Megoldás:

a=b esetén mindkét tört értéke 1, az egyenlőség teljesül. Ha a+b, akkor tekintsük a következő (b+1 db) pozitív számokat:

$$1;\ \frac{a}{b};\ \frac{a}{b};\ \dots\ \frac{a}{b}$$

ezek számtani közepe:

$$\frac{1+b\cdot\frac{a}{b}}{b+1} = \frac{a+1}{b+1}$$

Mértani közepük:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b+1}}$$

tehát:

$$\frac{a+1}{b+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b+1}}$$

a hatványozás monotonitását felhasználva

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^b$$

ami a bizonyítandó állítást adja a fenti összefüggéssel együtt.

Következmények és további alkalmazások

A számtani és mértani középre vonatkozó összefüggés egy gyakran használható következménye:

Tétel: Legyenek $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

és $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$

pozitív valós számok, továbbá

$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$!

Az összegek közül az a legnagyobb, amelyben a „b" és az „a" számok ugyanúgy vannak rendezve, és az a legkisebb, ahol a két sorozat ellenkezően van rendezve.

A téma tárgyalását *konkrét feladattal* vezetjük be. Képzeljük el, hogy egy fiókban 50 Ft-os, egy másikban 100 Ft-os, egy harmadikban 500 Ft-os, egy negyedikben 1000 Ft-os bankjegyek vannak. Az egyes fiókokból 2,3,4,5 db bankjegyet vehetünk ki, és ránk bízták, hogy melyikből hány darabot.

Tegyük fel, hogy mindenki az 1000 Ft-os bankjegyekből vesz legtöbbet, 5 db-ot, az 500 Ft-osból 4-et és így tovább.

Ezután kerülhet sor a tétel kimondására és az adott tanulócsoport színvonalának megfelelően a bizonyításra, illetve a számtani és mértani középre vonatkozó összefüggéssel való kapcsolat vizsgálatára.

Bizonyítás:

A tétel bizonyításánál eredményesen használhatjuk *Szűcs Adolf* (1884-1945) „Néhány nevezetes egyenlőtlenség közös forrásáról" szóló, a Matematikai és Fizikai Lapok 1935. évi 42. kötetében publikált cikkét.

Jelöljük a $b_1, b_2, \ldots b_n$ sorozat egy tetszőleges permutációját $c_1, c_2, \ldots c_n$-nel. Tekintsük az $S = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$ összegeket.

Ha az *összes a egyenlő,* akkor b-k bármely sorrendjéhez ugyanaz az összeg tartozik. Hasonló állítást fogalmazhatunk meg azonos b-k esetében is.

Ha az a_i-k között legalább két elem különbözik, és ezek a_r; a_s és $a_r > a_s$ hasonlítsuk össze az

$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$ és

$S' = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_rc_s + \ldots a_sc_r + \ldots + a_nc_n$

$S'-S = a_rc_o - a_rc_r - a_sc_o + a_sc_r$ összegeket!

tehát $S' > S$ ha $c_r < c_s$ és fordítva

Megjegyzés:

Eredményünk a következőképpen kapcsolódik a Cauchy-tételhez:

$$c = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \qquad a_1 = \frac{x_1}{c}, \qquad a_2 = \frac{x_1x_2}{c}$$

ekkor:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n < a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1}$$

amiből:

$$1 + 1 + \ldots + 1 \le \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \ldots + \frac{x_n}{c}$$

az általánosság megszorítása nélkül:

$$c \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Az eljárást fordított sorrendben végrehajtva az I. tétel „egyenlőség" részét felhasználva eljutunk a II. tétel minimális összegre vonatkozó állításához.

8. Igazoljuk, hogy a,b,c > 0 valós számok esetén

$$a^5b + b^5c + c^5a \le a^6 + b^6 + c^6$$

(Arany Dániel M.V. 1975. 2.f)

Megoldás:

az általánosság megszorítása nélkül mondhatjuk, hogy

$$a \ge b \ge c$$

A II. tétel alapján állításunk igazolást nyert.

9. Legyen $b_1, b_2, \ldots b_n$ a pozitív $a_1, a_2, \ldots a_n$ számok valamilyen permutációja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \ge n$$

Megoldás: (I.)

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést az

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$$

számokra!

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdots b_n}}$$

Az egyenlőség $\frac{a_i}{b_i} = 1$ esetben áll fenn. $(i = 1, 2, \ldots n)$

Megoldás: (II.) Tegyük fel, hogy az a-k nagyság szerint vannak rendezve, és

$$c_1 = \frac{1}{a_1}, \quad c_2 = \frac{1}{a_2}$$

Így a c-k ellenkezően rendezettek.
Az összeg minimális értéke

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n = n$$

ami a jelölések figyelembe vételével a bizonyítandó állítással egyenértékű.
A feladat egy általánosítása:

10. Legyen a $b_1, b_2, \ldots b_n$ pozitív valós számok egy pemutációja $a_1, a_2, \ldots a_n$, és c 0 Igazoljuk, hogy

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \cdot c^{a_i - b_i}$$

Megoldás:
A számtani és mértani közép közötti összefüggést az

$$\frac{a_i}{b_i} \cdot c^{a_i - b_i}$$

pozitív valós számokra alkalmazva

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \cdot c^{a_i - b_i}}{n} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \cdot c^{a_i - b_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}{\prod\limits_{i=1}^{n} b_i} \cdot c^{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Mivel a_i-k és b_i-k csak sorrendben térnek el egymástól,

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} b_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i, \text{ így az:}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \cdot c^{a_i - b_i} \geq n \sqrt[n]{1 \cdot c^0} = n$$

ami a bizonyítandó állítás.

Az egyenlőtlenség értelmezése függvényekre

A függvényekre való áttérést a körbe írható háromszögek területének vizsgálatával kezdhetjük.

11. A körbe írható háromszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb?

A tanulók geometriai tapasztalataik alapján sejtik, hogy az egyenlő oldalú háromszögről van szó, ezt bizonyítani is fogjuk.

Megoldás:

A háromszög területe függ a szögektől:

$$t = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

A háromszög köré írható kör átmérőjét d-vel jelölve

$$a = d \cdot \sin\alpha$$
$$b = d \cdot \sin\beta$$

így:

$$t = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \qquad (\alpha + \beta + \gamma) = 180°$$

Eredeti feladatunkat átfogalmazva:

Mikor lesz három állandó összegű szög szinuszának szorzata a legnagyobb?

Segédtétel: Két egyenlő (konvex) összegű szögpár közül azok szinuszainak a szorzata a nagyobb, amelyekben kisebb szögek közötti különbség.

Bizonyítás:

Legyen

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \leq 180$$
$$2 \sin x_1 \cdot \sin x_2 = \cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)$$
$$2 \sin y_1 \cdot \sin y_2 = \cos(y_1 - y_2) - \cos(y_1 + y_2)$$

A jobb oldalon álló kivonandók megegyeznek, így az a jobb oldal a nagyobb, ahol a szögek különbségének az abszolútértéke kisebb,

azaz: ha

$$| x_1 - x_2 | < | y_1 - y_2 |,$$

akkor

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 > \sin y_1 \cdot \sin y_2$$

Visszatérve a feladat megoldására, legyen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° = 3\,\delta$$

Ha az egyik szög sem egyenlő δ-val, akkor pl.

$$\alpha > \delta, \qquad \beta < \delta$$

Képezzünk új szöghármast:

$$\alpha', \beta', \gamma' \text{-t}$$

ezekre:

$$\alpha' = \delta \qquad \text{és} \qquad \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \quad , \quad \gamma = \gamma'$$
$$\alpha + \beta = \delta + \beta'$$

Ekkor a segédtétel felhasználásával:

$$\sin\alpha' \cdot \sin\beta' > \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin\alpha' \cdot \sin\beta' \cdot \sin\gamma' > \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

vagy

$$\sin\delta \cdot \sin\beta' \cdot \sin\gamma' > \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$
$$\beta' + \gamma' = 2\,\delta \qquad \text{miatt} \qquad \sin\delta \cdot \sin\delta > \sin\beta' \cdot \sin\gamma'$$

tehát:

$$\sin\delta \cdot \sin\delta \cdot \sin\delta \geq \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

azaz

$$\alpha = \beta = \gamma = 60°$$

esetben maximális a körbe írt háromszög területe.

Megjegyzés:

Eredményünket n szögre is kiterjeszthetjük:

$$\sqrt[n]{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_n} \le \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}$$

ahol

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \le 180°$$

Tapasztalatainkat általánosítva megfogalmazhatjuk, hogy:

Alulról konkáv f(x) folytonos görbe esetén az adott intervallumban bármely különböző x_1, x_2 helyre:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Alulról konvex folytonos görbe esetén az adott intervallumban bármely különböző x_1, x_2 helyre

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Megfogalmazhatjuk *Jensen tételét:*

Ha az I intervallumban értelmezett f(x) függvényre teljesül

$$f(x_1) + f(x_2) \ge 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

bármely x_1, $x_n \in I$ esetén,

akkor

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n) \ge nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

bármely $x_i \in I$ esetén

Ha az I intervallumban értelmezett f(x) függvényre

$$f(x_1) + f(x_n) \le 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

bármely x_1, $x_n \in I$ esetén,

$$\text{akkor } f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n) \le nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

bármely $x_i \in I$ esetén.

12. Legyenek α, β, γ egy háromszög szögei.

Bizonyítsuk be, hogy:

$$\mathrm{ctg}^2\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\beta + \mathrm{ctg}^2\,\gamma \ge 1$$

(OTV. 1956. 2. ford.)

Megoldás:

Először azt bizonyítjuk be, hogy

$$|\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,| + |\,\mathrm{ctg}\,\beta\,| \ge 2\,\left|\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha + \beta}{2}\right|$$

A függvény az adott intervallumban alulról konvex,

$$|\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,| + |\,\mathrm{ctg}\,\beta\,| = \frac{|\cos\alpha\,|}{\sin\alpha} + \frac{|\cos\beta\,|}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\,|\cos\alpha\,| + \sin\alpha\,|\cos\beta\,|}{\sin\alpha\,\sin\beta} \ge$$

$$\ge \frac{|\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,|}{\sin\alpha\,\sin\beta} = \frac{|\sin(\alpha + \beta)\,|}{\sin\alpha\,\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\,\left|\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right|}{\sin\alpha\,\sin\beta}$$

Azt igazoljuk, hogy:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|}{\sin\alpha\sin\beta} \geq 2\cdot\frac{\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

mindkét oldalt megszorozzuk a pozitív

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|}$$

kifejezéssel

$$1-\cos(\alpha+\beta)\geq 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$1\geq\cos(\alpha-\beta)$$

Alkalmazzuk Jensen tételét az f: $x \to |\operatorname{ctg} x|$ függvényre:

$$|\operatorname{ctg}\alpha|+|\operatorname{ctg}\beta|+|\operatorname{ctg}\gamma|\geq 3\cdot\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right|$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma=3\cdot\operatorname{ctg}^2 60^\circ=1$$

Az itt közölt feladatsorozat a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség felhasználási lehetőségei közül csak néhányat igényel és alkalmaz – teljességre törekvés nélkül. Az adott oktatási formák közül csupán ízelítőt kívántam adni a felsőbb matematikában állandó eszközként alkalmazott egyenlőtlenségek szűk köréből. A felsőbb analízis tanulására való előkészítés és a függvényközpontú gondolkodás fejlesztése miatt került az anyagba egyéb hasznos egyenlőtlenség tárgyalása helyett a Jensen-tétel.

IRODALOM

A Matematika Tanítása 988. feladat

Balcza Lajos: A Cauchy-féle egyenlőtlenségről. = A Matematika Tanítása. 1974/3. sz.

Bereznai Gyula: Újabb bizonyítás a számtani-mértani közép egyenlőtlenségre. = A Matematika Tanítása 1977/3. sz.

Bogdán Zoltán: Néhány gondolat a gimnáziumi matematikai szakkör érdekében = A Matematika Tanítása, 1982/2. sz.

Csorba Ferenc: Mérőlapok felvételire. Győr-Sopron Megyei Pedagógiai Intézet, 1990

Középiskolai Matematikai Versenytételek, 1975-76. Szerk.: *Bakos Tibor,* Budapest, Tankönyvkiadó, 1979.

Hajós-Neukomm-Surányi: Matematikai Versenyfeladatok Gyűjteménye Budapest, Tankönyvkiadó 1974.

Skljarszkij-Csencov-Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 1. Budapest, Tankönyvkiadó 1967