4. a) mosógép, b) asztali fúrógép (más példa is elfogadható, de kettőnél többet nem veszünk figyelembe)
5. a) motor, b) ékszíj, c) motor, d) fúró, e) fogaskerék, f) fúró
6. Egyenetlen megterhelésnél megcsúszhat, ezért nem törik össze a gép
7. Nem csúszik meg, ezért egyenetlen terhelésnél a fogak letörhetnek
8. Párhuzamos
9. a) 40, b) ellentétes az A kerék forgásirányával
10. a) n_1 a hajtó kerék fordulatszáma, b) n_2 a hajtott kerék fordulatszáma, c) d_1 a hajtó kerék átmérője, d., d_2 a hajtott kerék átmérője
11. a) a szíjat keresztezéssel kell berajzolni, b) a forgásirányt ellentétesen kell berajzolni
12. Egy-egy vízszintes sor csak mindegyik x beírása esetén fogadható el.

	dörzshajtás	szíjhajtás	fogaskerék	lánckerék
a.) alakzáras közlőmű			X	X
b.) megcsúszhat	X	X		
c.) fogak nagysága megegyezik			X	X

Szorgalmi feladat:

a) fogasléc + fogaskerék (Egyik megnevezés is elegendő)

b) Emelésnél, kormányzásnál nem szabad a keréknek, a tehernek megcsúsznia, mert az balesetet okozhat.

IRODALOM

Bágyi Péter-Tóth György József: Technika 6. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
Bágyi Péter: Transzparens sorozat az általános iskola 6. osztályának technika anyagához, OOK, Tanért, 1984.
Orosz Sándor: Elemző vizsgálatok az iskolában, MPI, Veszprém, 1988.
Technika tanterv 6. osztály, OPI, Budapest, 1978.
Útmutató az általános iskolai technika korrekciójához, OPI, Budapest, 1987.

VESZTRÓCZY LÁSZLÓ

A pitagoraszi számhármasok általánosításai

A közismert pitagoraszi számhármasok olyan pozitív egész számokból álló számhármasok, amelyek a Pitagorasz-tétel algebrai alakját, vagyis az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenletet kielégítik. Ismeretes, hogy az összes pitagoraszi számhármas előállítható az

$$a = p^2 - q^2, b = 2pq, c = p^2 + q^2 \ (p > q; p,q \in N)$$

képletekkel. Hogy ezek a képletek valóban pitagoraszi számhármasokat szolgáltatnak, azt a $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$ (1) azonosság világosan mutatja. Figyeljük meg ennek szerkezetét, alapelvét, mert az általánosításokban ez a motívum többszörösen elő fog fordulni.

I. Az egyik fajta általánosítást jelentik azok a szám-n-esek, amelyek a Pitagorasz-tétel (n-1)-dimenziós általánosítását elégítik ki ($n > 3$; $n \in N$). (Lásd *Fitos László:* Pitagoraszi számnégyesek és szám-n-esek, A Matematika Tanítása, 1983. évi 5. szám) Például a pitagoraszi számnégyeseket előállító képletek, amelyek az $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ egyenletet elégítik ki: $a = p^2 - q^2 - r^2$, $b = 2pq$, $c = 2pr$, $d = p^2 + q^2 + r^2$ ($p^2 > q^2 + r^2$; $p, q, r \in N$)

Ellenőrzésként győződjünk meg róla, hogy $(p^2 - q^2 - r^2)^2 + (2pq)^2 + (2pr)^2 = (p^2 + q^2 + r^2)^2$ (2)

Vagy: $a = p^2 + q^2 - r^2$, $b = 2pr$, $c = 2\,qr$, $d = p^2 + q^2 + r^2$ ($p^2 + q^2 > r^2$ és $p, q, r \in N$) hiszen $(p^2 + q^2 - r^2)^2 + (2pr)^2 + (2qr)^2 = (p^2 + q^2 + r^2)^2$ (3) is azonosság.

II. Egy másik fajta általánosítást jelentenek azok az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív egész számokból álló szám-n-esek, amelyekből az első k darab szám négyzetének összege egyenlő a többi n-k darab szám négyzetének összegével, azaz

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = a_{k+1}^2 + \ldots + a_n^2 \qquad k<n \quad (k,n \in N) \qquad (4)$$

Ennek első speciális eseteként az

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + a_4^2 \qquad (5)$$

diofantikus egyenletet oldjuk meg. A megoldás érdekessége, hogy nem számelméleti, hanem koordinátageometriai módszert fogunk alkalmazni.

Egyszerűség kedvéért írjuk át (5)-öt az

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \qquad (6)$$

alakba! Ha ezt az egyenletet d^2-tel elosztjuk és az

$$\frac{a}{d} = x, \quad \frac{b}{d} = y, \quad \frac{c}{d} = z$$

helyettesítéseket elvégezzük, akkor az

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \qquad (7)$$

egyenlethez jutunk, amely egy egyköpenyű hiperboloid egyenlete. Mivel pedig a, b, c, d pozitív egész számok, azért x, y, z pozitív racionális számok. A feladatunk tehát az, hogy meghatározzuk az összes olyan x, y, z pozitív racionális számhármast, amely (7)-et kielégíti, más szóval meg kell keresnünk a (7) egyenletű hiperboloid minden olyan pontját, amelynek mind a három koordinátája pozitív racionális szám.

Ezek a pontok a felület első térnyolcadban levő részén vannak és könnyen kimetszhetők olyan egyenesekkel, amelyek a felület torokgörbéjének $P_0(-1; 0; 0)$ pontján mennek át. A P_0 pontra illeszkedő, $\underline{v}$ (p; q; r) irányvektorú egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x+1}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \qquad (8)$$

amelyben p, q, r számértékét az adott feltételeknek megfelelően kell majd megválasztani.

A keresett metszéspontok koordinátáinak kiszámítása céljából meg kell oldanunk a (7) és (8) alatti egyenletekből álló egyenletrendszert. (8)-ból

$$x = \frac{pz}{r} - 1 \qquad \text{és} \qquad y = \frac{qz}{r}$$

és ezeket a kifejezéseket (7)-be helyettesítve:

$$\frac{p^2z^2}{r^2} - \frac{2pz}{r} + \frac{q^2z^2}{r^2} - z^2 = 0\,,$$

azaz $z(p^2z - 2pr + q^2z - r^2z) = 0$ (10)

Innen z-re két érték adódik. Az egyik, a z=0 előre ismert volt, hiszen az a metsző egyenes rögzített P_0 pontjának a z koordinátája. A (10) alatti egyenlet másik gyöke:

$$z = \frac{2pr}{p^2 + q^2 - r^2}$$

és az ehhez tartozó másik két ismeretlen (9) alapján:

$$x = \frac{2p^2}{p^2 + q^2 - r^2} - 1 = \frac{p^2 - q^2 + r^2}{p^2 + q^2 - r^2} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{2pq}{p^2 + q^2 - r^2}$$

Végül visszahelyettesítve x, y, z helyébe az

$\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$

törteket, megkapjuk a (6) alatti egyenlet megoldását, a keresett a, b, c, d számnégyes általános képleteit: $a = p^2 - q^2 + r^2$, $b = 2pq$, $c = 2pr$, $d = p^2 + q^2 - r^2$ (11) ($p^2 + r^2 > q^2$, $p^2 + q^2 > r^2$; $p, q, r \in N$)

Tehát, ha p, q, r olyan természetes számok, hogy $p^2 + r^2 > q^2$ és $p^2 + q^2 > r^2$, akkor a, b, c, d-re pozitív egész számokat kapunk.

Ellenőrzésül meggyőződhetünk róla, hogy $(p^2 - q^2 + r^2)^2 + (2pq)^2 = (2pr)^2 + (p^2 + q^2 - r^2)^2$ (12)

Megjegyzések

1. Triviális esethez jutunk, ha p = q = r, vagy csak q= r. Akkor ugyanis a = d és b = c.
2. Az is triviális megoldáshoz vezet, ha p = q + r, ugyanis ebben az esetben

$a = p^2 - q^2 + r^2 = (q + r)^2 - q^2 + r^2 = 2qr + 2r^2$

$b = 2pq = 2(q + r)q = 2q^2 + 2qr$

$c = 2pr = 2(q + r)r = 2qr + 2r^2$

$d = p^2 + q^2 - r^2 = (q + r)^2 + q^2 - r^2 = 2q^2 + 2qr$, azaz a = c és b = d

3. Ha az a, b, c, d természetes számok kielégítik (6)-ot, akkor az na, nb, nc, nd számok is ($n \in N$) és fordítva.
4. Ha a (6) alatti egyenletet kielégítő a, b, c, d természetes számok legnagyobb közös osztója egy, akkor az ilyen számnégyest alapmegoldásnak nevezzük.
5. Ha a p, q, r számok közös osztója a k szám, akkor az a, b, c, d számok mindegyike osztható k^2-tel.
6. Ha p osztható k-val és q + r vagy q – r is osztható k-val, akkor a számnégyes mindegyik eleme osztható k-val.
7. Ha q-t és r-et felcseréljük, akkor ugyanazt a számnégyest kapjuk fordított sorrendben.
8. Ha p, q, r közül bármelyik kettő páratlan és a harmadik páros, akkor a, b, c, d mindegyike páros. Az ilyen esetekből is kapunk alapmegoldást, ha a négy számot elosztjuk a legnagyobb közös osztójukkal.

E megjegyzések, észrevételek sora bizonyára még folytatható. Most előállítunk néhány alapmegoldást a (11) alatti képletek segítségével és a fenti észrevételek figyelembevételével. (1. táblázat)

A (4) alatti diofantikus egyenlet további speciális eseteinek megoldása most már az eddigiek alapján (lásd az (1), (2), (3), (12) alatti azonosságokat) nem okoz különösebb nehézséget. Például az

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2$ (itt n=5 ; és k=3)

egyenlet megoldása:

$a_1 = p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_4^2$, $a_2 = 2p_1p_2$, $a_3 = 2p_1p_3$, $a_4 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2$,

$a_5 = 2p_1p_4$

ugyanis

$(p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_4^2)^2 + (2p_1p_2)^2 + (2p_1p_3)^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2) + (2p_1p_4)^2$

Ennek mintájára a (4) alatti egyenlet megoldása (ahol k és n tetszőleges pozitív egész szám és k < n):

$a_1 = p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - \ldots - p_k^2 + p_{k+1}^2 + \ldots + p_{n-1}^2$,

$a_2 = 2p_1p_2$,

$a_3 = 2p_1p_3$,

...

$a_k = 2p_1p_k$,

$a_{k+1} = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_k^2 - p_{k+1}^2 - p_{k+2}^2 - \ldots - p_{n-1}^2$,

$a_{k+2} = 2p_1p_{k+1}$,

$a_{k+3} = 2p_1p_{k+2}$,

...

$a_n = 2p_1p_{n-1}$

ahol a_1 képletében a negatív tagok száma k-1 és az utánuk következő pozitív tagok száma n-k-1.

Bizonyos esetekben azonban az előbbi általános, minden esetre érvényes képletsor helyett egyszerűbb képletsor is található. Például az

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = a_6^2 + a_7^2 + a_8^2$

egyenletet kielégítő számnyolcasra:

$a_1 = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 + p_5^2$, $a_2 = 2p_1p_3$, $a_3 = 2p_1p_4$, $a_4 = 2p_2p_3$, $a_5 = 2p_2p_4$,

$a_6 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5^2$, $a_7 = 2p_1p_5$, $a_8 = 2p_2p_5$, vagy

$a_1 = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 - p_5^2$, $a_2 = 2p_1p_3$, $a_3 = 2p_1p_4$, $a_4 = 2p_2p_3$, $a_5 = 2p_2p_4$,

$a_6 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5^2$, $a_7 = 2p_{3p_5}$, $a_8 = 2p_4p_5$

de az ilyen megoldások vizsgálata már túllépi e cikk kereteit.

p	q	r	$a = p^2 - q^2 + r^2$	$b = 2pq$	$c = 2pr$	$d = p^2 + q^2 - r^2$	Legnagyobb közös osztójukkal osztva
2	1	2	7	4	8	1	
3	3	1	1	18	6	17	
3	3	2	4	18	12	14	2, 9, 6, 7
4	2	1	13	16	8	19	
4	3	2	11	24	16	21	
4	4	1	1	32	8	31	
5	2	1	22	20	10	28	11, 10, 5, 14
5	3	1	17	30	10	33	
5	4	2	13	40	20	37	
6	3	2	31	36	24	41	
6	3	1	28	36	12	44	7, 9, 3, 11
7	3	2	44	42	28	54	22, 21, 14, 27
7	6	5	38	84	70	60	19, 42, 35, 30
8	3	1	56	48	16	72	7, 6, 2, 9

1. táblázat

FITOS LÁSZLÓ

Bábozzunk!

A bábjáték, mint ez a nevében is benne van, elsősorban játék, melyhez a gyermekek érzelmileg erősen kötődnek. Az emocionális kötődés és a bábjáték műfaji sajátosságai lehetőséget adnak arra, hogy az óvodai nevelés folyamatában a bábjátékot sikeresen felhasználjuk oktatási-nevelési céljaink eléréséhez. A gazdag élményanyagot nyújtó bábszínházi előadások megtekintésén kívül az óvodai bábozásban is óriási lehetőségek rejlenek, melyek következetesebb kihasználásával a kisgyermekeket sikeresebben segíthetjük személyiségük kialakulásában.

A személyiségfejlődésnek egyik legfontosabb szakasza az óvodáskor. Ez a kor az anyától való elszakadás, az éntudat kialakulásának a kora, melyet gyakran egyszerűen csak dackorszaknak nevezünk. A gyermekeket ilyenkor fokozottan kell a közösségbe való beilleszkedésben segíteni, hiszen ekkor kell megtanulniuk az alapvető viselkedésnormákat, a „társadalmi szokásokat". A „kioktatás" nem megfelelő módszer, a gyermekek reakciója erre általában a dacolás. E problémákhoz ne direkt módon, hanem az életkori sajátosságoknak megfelelően játékos formában közelítsünk. A kisgyermekek ugyanis