Gondolatok a matematika tanításáról

REIMANN JÓZSEF

Több mint három évtizedes egyetemi oktatási gyakorlatom során meglehetősen széles körű áttekintést kaptam arról, hogy milyen matematikai alapokkal kerülnek a hallgatók az egyetemre, milyen szakadék tátong a középiskolai és az egyetemi oktatás között és hogyan lehetséges ezt áthidalni. Tapasztalataimat elsősorban a Budapesti Műszaki Egyetemen szereztem, ezért nem térek ki a tudományegyetemek matematika szakára került hallgatókra, ahol általában lényegesen jobb a helyzet. Ezzel máris érzékeltettem, hogy a tanulók nagy átlagára vonatkozólag a matematikai felkészültség, az érdeklődés és a gondolkodókészség meglehetősen siralmas. A keserűség fogatott tollat velem, hiszen a helyzet az utóbbi években tovább romlott, amit a felvételi tapasztalatok is igazolnak.

Tapasztalataim nagyobb részét különböző karokon mérnökhallgatók oktatása során szereztem, akik az érettségizettek nagy átlagához viszonyítva matematikából lényegesen jobbak. Mit mondhatunk a matematika oktatás eredményességéről, ha azokat a tanulókat is figyelembe vesszük akik nem kerülnek be a felsőoktatásba?

Célszerű megvizsgálni azt a kérdést, honnan származik az ellenszenv és idegenkedés, amit érettségizett, sőt egyetemet végzett emberek jelentős része, – ha ugyan nem a túlnyomó többsége – táplál a matematikával szemben. Számos ismerőse van mindenkinek, aki nagyon okos és művelt embernek tartja magát, ugyanakkor minden szégyenkezés nélkül a matematikához hatökörnek minősíti önmagát és eszébe sem jut, hogy itt némi ellentmondás rejlik.

Kétségtelen, hogy az iskolában a legtöbb diák megútálja a matematikát, talán 10-15 százalék kivételével alig értenek meg belőle valamit. Miért van ez? Ennyire buták a gyerekek? Vagy talán rosszul tanítjuk a matematikát? Egyik sem lehet igazi oka a siralmas eredménynek. Kétségtelen, hogy a gyerekek között igen nagy különbségek vannak a szellemi érettség, intelligencia szempontjából. Ennek ellenére általában ugyanabban az életkorban ugyanazt az ismeretanyagot ugyanannyi idő alatt akarjuk rájuk erőltetni, természetesen nem sok sikerrel. A sikertelenség egyik fő oka az, hogy a tanulók többsége nem is mutat érdeklődést az iskolai matematika anyag iránt. Mi lehet ennek az oka? A gyerekben vagy a tananyagban rejlik az ok? Úgy vélem, hogy inkább a tananyag okozhatja a gondot, hiszen az igazán érdekes dolgok lekötik a gyerekek figyelmét, hallatlan érdeklődést figyelhetünk meg náluk.

Ami pedig azt a kérdést illeti, hogy jól vagy rosszul tanítjuk a matematikát, nyilvánvaló, hogy vannak jó tanárok és gyengébbek ugyanúgy, mint a más szaktárgyakat tanító kollegák között. A matematika tanításának eredményessége nem ezen múlik, hiszen a matematikatanárok többsége – csakúgy mint a többi tanár – lelkiismeretesen, felelősségtudattal, szakmai hozzáértéssel és szorgalmasan végzi a dolgát, némelyik szinte megszállott lelkesedéssel erőlködik, hogy felkeltse az érdeklődést és elérje, hogy a tanulók megértsék és elsajátítsák a számukra sokszor meglehetősen unalmas tananyagot. A jó tanár néhány tanulóban valóban fel is tudja kelteni és ideig-óráig ébren tudja tartani az érdeklődést. A matematikai érzékkel megáldott tanulók hamar megértik az anyagot, de a többség csak addig jut el, hogy tudomásul veszi hogyan kell végrehajtani a matematikai műveleteket és elég sok gyakorlás után kis segítséggel végre is tudja hajtani a törtek összeadását vagy a másodfokú egyenletek megoldását a kapott kaptafa segítségével. Az azonban örökre rejtve marad előtte, hogy miért úgy kell végrehajtani. Már csak azért sem látja a célját, mert a szülei sem tudják megoldani a példákat, mégis egész jól elboldogulnak. Legtöbbször keresnek valakit, aki korrepetálja a gyereket „matekból", hogy valahogy átmenjen az érettségin. Még nagyobb keletje van a korrepetálásnak a felvételi előkészítés szempontjából, „teamek"-ben, a „legkorszerűbb", számítógépbe tárolt példák és megoldási sablonok segítségével súlykolják a típusfeladatok megoldását. Azt hiszem, amit eddig leírtam – jóllehet keserű tapasztalatom – mindenki előtt ismeretes. Ráadásul világviszonylatban hasonló a helyzet. A matematikaoktatással foglalkozó kollégák túlnyomó többsége világosan látja, hogy mennire elavult, korszerűtlen a tananyag, amelyet matematika néven tanítunk a középiskolában és méginkább az általános iskola felső tagozatában. Lényegében a középkor matematikai ismereteit közvetítjük, így-úgy variálva, többszörösen megreformálva, lényeges változtatás nélkül. Megállt az idő legalább 300 évvel a matematikaoktatásban. Szembe kell néznünk azzal az igazsággal – bármennyire kellemetlen is –, hogy amit matematika néven oktatunk elavult, unalmas tananyag, nem a valódi élő matematika, és ezért unják a diákok is. Megmerevedett és a tudomány fejlődésétől elszakadt ismerethalmazt nyújt, és nem alkalmas arra, hogy felkeltse a diákok érdeklődését. Ha sikerül a diákok érdeklődését felkelteni a matematika iránt – és ezt a matematika valóban érdekes fejezeteivel érhetjük el –, akkor a matematikaoktatás hatásfoka jelentősen emelkedik.

Mit kell változtatni?

Milyen érdekes fejezeteket kellene oktatni? A mai matematika tananyag a világot mintegy megmerevedett, álló valamit, élő-és élettelen tárgyak halmazát tükrözi, kirekesztve a mozgást, a változást, a függés vizsgálatát, a statisztikai törvényszerűségek észrevételét és mindezek rengeteg alkalmazási lehetőségét a természet és a társadalom életének, változásainak megértését és annak matematikai vetületét. Mindehhez szükség van a kombinatórikának, az analízis elemeinek és a valószínűségszámítás egyszerűbb fejezeteinek bemutatására. Ezeken keresztül nemcsak a gondolkodás fejlesztésében tudunk nagyot lépni előre, hanem a matematika oktatását közelebb hozzuk az élethez. A differencál-és integrálszámítás elemeinek valamint valószínűségszámítási alapoknak a megismertetése során valódi gyakorlati példák olyan tömege áll rendelkezésünkre, hogy nem kell erőlködnünk annak érzékeltetése során a tanulók számára, hogy a matematika nemcsak hasznos és szükséges, de nélkülözhetetlen a világ megértéséhez.

A tananyag „korszerűsítésével", reformjával már sokat foglalkoztak, érdemleges változás azonban nem következett be, inkább csak átcsoportosítgatások történtek. Valóságos kultúrbotrány, hogy az iskolák többségébe nem engedjük be a matematikának az utóbbi két-háromszáz évben született eredményeit és középkori ismeretek körében toporgunk, amelyek birtokában a szaktárgyi ismeretek sem érthetők meg. Természetesen vannak (és elég sokan lehetnek) akik úgy gondolják, hogyha a törtek összeadása meg az egyszerűbb szöveges egyenletek megoldása is problémát okoz, akkor hogyan lehetne differenciál-és integrálszámítást, valószínűségszámítást tanítani a középiskolákban. Ez agyrém. Sokkal megfontoltabban, visszafogottabban lehet csak megreformálni a tananyagot. Azzal egyetértek, hogy megfontoltan, de gyökeresen meg kell változtatni a matematika (és nem csak a matematika) oktatását. Világosan kell látni, hogy a matematikaoktatás eredményessége szempontjából a csőd szélén állunk, és égetővé vált a lényeges változtatás szükségessége. Ahol eddig kísérlet történt a matematika említett „újabb" fejezeteinek oktatására, a differenciál-és integrálszámítás tanítására, kombinatórika és valószínűségszámítás elemeinek egyszerű tárgyalására, a kísérletek általában nagyfokú sikerrel jártak itthon és külföldön egyaránt. (Hogy mást ne mondjak 50-60 évvel ezelőtt a gimnáziumban nálunk mindezt tanították!) A kísérletek az új anyagrészek tanításával és számos érdekes alkalmazásával oly mértékben felkeltették a gyerekek érdeklődését, hogy a matematika anyagának megértése ugrásszerűen megnőtt. A 14-18 éves gyerekek a legfogékonyabbak a matematikára, vétek tétlenségre kárhoztatni az eszüket. Az említett fejezetek oktatásával a matematikát oktató kollégák mozgástere jelentősen kibővülne, nagyobb lehetősége lenne a gondolkodásra-nevelésre, az absztraháló képesség fejlesztésére éppen a valódi alkalmazási példák páratlanul széleskörű bemutatásával, a matematikai modellezési készség kialakításával. Sokan azt vetik fel, hogy a tanulók többségének gyenge az absztraháló képessége, a matematika viszont túlságosan elvont, absztrakt tudomány, így reménytelen a „nehezebb" anyagrészek megértése. A matematika valóban elvont tudomány, éppen absztrakt voltában rejlik a széleskörű alkalmazhatósága. Minél elvontabb egy tétel, annál nagyobb az a valóságbeli háttér, amelyre alkalmazható. Az absztrakciókban azt keressük, ami a dolgokban közös és elhagyunk minden lényegtelent. Az absztraháló képesség tehát lényeglátó képesség, más szóval gondolkodóképesség. Éppen e gondolkodóképesség fejlesztése az elsődleges célja a matematika oktatásnak. Vajon van-e más eszköz, más tudomány, amely alkalmasabb a gondolkodóképesség fejlesztésére, mint a matematika? Természetesen nem arról van szó, hogy rangsorolni akarnám a tantárgyakat, mindössze arra kívánok rámutatni, hogy a matematika a tantárgyak többségének megértéséhez, a világ jelenségeinek,megértéséhez, a természet és a társadalom mozgástörvényeinek felismeréséhez (és nem csak a leírásához) páratlanul hatékony eszköz a hozzáértő kezében. Az absztraháló, gondolkodóképesség természetesen nem úgy fejlődik, hogy ülünk egy sötét szobában, behunyjuk a szemünket és megpróbálunk „absztrahálni".

A valódi alkalmazási feladatok során felállított modellek, kísérletek végzése, ábrák készítése, más hasonló feladatok kitűzése, a feladatok fokozatossága, az önálló munka megkövetelése fejleszti az absztraháló képességet, de ehhez a jelenleg oktatott matematikaanyag nem megfelelő, jelentősen ki kell bővíteni, az „álgyakorlati" feladatokat elhagyni és bátran újítani. Ha sikerül a tanulók érdeklődését néhány sikerélménnyel felébreszteni, akkor a tananyag-felvevő képességük exponenciálisan nőni fog.

A matematika időigénye

A matematikát oktató kollégák többsége természetesen szívesen oktatná a matematika modernebb fejezeteit, megtanítaná a gyerekek többségét differenciálni, integrálni, játszana a kombinatórikus feladatokkal, kialakítaná a statisztikus törvényszerűségek vizsgálatának módszereit, ha lenne idő minderre. Kétségtelen, hogy a matematika rendkívül időigényes. Ennek alapvető oka, hogy maga a megértés sokkal lassúbb folyamat, mint azt sokan gondolják. A gondolkodóképesség még a gyerekeknél is viszonylag lassan fejlődik (hát még később), ezért időt kell adni a gondolkodásra és nagy pedagógiai művészettel vezetni rá a gyereket a megoldásra. El kell és el lehet érni, hogy a „miértre" helyeződjék a hangsúly, az összefüggések megértése domináljon, ne pedig a tudomásulvétele.. Sokkal többet kell kérdeznünk, mint közölnünk a matematika tanítása során. A tanulókat rengeteg hatás éri, amely leszoktatja őket a gondolkodásról. Kezdve a televíziótól, a szülők, a környezet sőt az iskola is legtöbbször tudomásul vétet, emlékezetet terhel. A vetélkedők többségén is olyat kell tudni, amit nem is nagyon érdemes tudni. Erős primitiválódási folyamatnak vagyunk szenvedő részesei. Némleg javíthatna a helyzeten, ha a matematikaoktatás, és általában az oktatás és nevelés színvonalát sikerülne emelni. Erre csak az iskolában lehet remény. Az elsajátítandó ismereteket tantárgyakra tagolták, a tantárgyakra vonatkozólag valakik valamikor (talán éppen napjainkban is) megállapították a heti óraszámokat valamilyen megfontolás alapján. Nyilván figyelembe vették a tanítandó ismerethalmazt, majd megállapították, hogy mindegyik tantárgyra kevés az óraszám, azután valamilyen erőviszonyok alapján kialakultak a mai óraszámok. Ha a döntéshozók visszagondolnak arra, hogy mennyi ideig tartott nekik egy-egy matematikai tétel megértése és a példák önálló (!) megoldása, vagy netán országos és helyi felmérés történnék, hogy a tanulók többsége mennyi időt fordít egy-egy tantárgyból a felkészülésre általában, akkor jelentős átcsoportosításra kerülne sor. A magam részéről arról sem vagyok meggyőződve, hogy a szükséges ismeretek történelmileg kialakult tantárgyakra tagolása az optimális megoldás, mivel a széttagolt ismeretek valamilyen rendszerbe foglalására, szintetizálására semmilyen kísérlet nem történik. Ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozom csak megemlítem, hogy jelentős, sőt ígéretes kísérletek is vannak más oktatási struktúrák alkalmazására. Visszatérek az eredeti égető problémára, a matematika időigényességére. Ha egyszer a matematika időigényes, ami mindenki előtt világos, akkor időt kell adni,az oktatására és az elsajátítására. Ezen másképpen, semmiféle bűvészmutatvánnyal nem lehet segíteni. Ha a matematikára több időt fordítunk, akkor az megtérül számos más (főleg természettudományos) tantárgy elsajátítási sebességében. Természetesen a nem matematika szakos kollégák némi rosszallással olvassák ezeket a sorokat és azt mondják rá, hogy „minden cigány a maga lovát dícséri". Itt azonban másról van szó, nem rivalizálásról. Mindenki előtt ismeretes a mondás, hogy „a természet törvényei a matematika nyelvén vannak megírva". Valójában ennél sokkal többről van szó, mivel nemcsak a törvényszerűségek leírásában, hanem a törvényszerűségek felfedezésében is nélkülözhetetlen a matematika. Ha a matematikát a törvényszerűségek leírására való „nyelv"-nek tekintjük, akkor szembetűnő jellemzője, a rendkívüli tömörsége. Nagy dolog, ha valaki a formulákból olvasni tud. Hogy a matematikai formulák mennyire tömör formában tartalmazzák az információt, annak érzékeltetésére említem a következőt. *C. Shannon* az információelmélet megalapozója vizsgálta az írott angol szöveg redundanciáját. Megállapította, hogy a redundancia kb.66%, azaz ha az írott szövegből véletlenszerűen a betűk kétharmad részét kitöröljük, a szöveg még egyértelműen visszaállítható, olvashatóvá tehető. Ha viszont egy matematikai képletben akár egyetlen jel (betű vagy szám) hiányzik, a formula máris értelmét veszti. A matematika tehát az információnak roppant tömör kódolása. Ez azt jelenti, hogy egy 100 oldalas matematika könyv, vagy jegyzet tartalmát korántsem lehet ekvivalensnek tekinteni 100 oldalas szöveges tankönyv tartalmával. Ha a tantárgyak óraszámát a közlendő ismerethalmaz nagyságától tesszük függővé, akkor ezt a tényt is figyelembe kell vennünk.

Amikor a matematika időigényességét hangsúlyozom, egyáltalán nem azt akarom mondani, hogy a jelenlegi óraszám keretek között nem lehet a matematika oktatását közelebb hozni az élet, a gyakorlat igényeihez, ugyanakkor jelentősen emelni az oktatás színvonalát, modernebbé és a tanulók számára sokkal érdekesebbé tenni a matematika tantárgyat. Ki tudja azt megmondani, hogy a későbbiekben az egyes tanulóknak mire lesz szüksége a matematikából? A válasz nem attól függ-e, hogy mi lesz a tanuló további sorsa, tovább tanul-e, s ha igen melyik felsőoktatási intézményben, mi lesz majdan a foglalkozása? A gondolkodó, absztraháló, modellező képesség fejlődésére, a pontos fogalmazásra, logikus következtető képességre nyilván minden tanulónak szüksége van. Mindebben egy modernebb matematika tanítása nyújthatna segítséget. Emellett az ipar, a mezőgazdaság, biológia, híradástechnika, a kereskedelem, a gazdasági élet számos problémájának megoldása a matematika újabb területeinek, a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika módszereinek ismeretét és alkalmazását igényli. A továbbiakban ezzel a kérdéskörrel foglalkozunk kissé részletesebben.

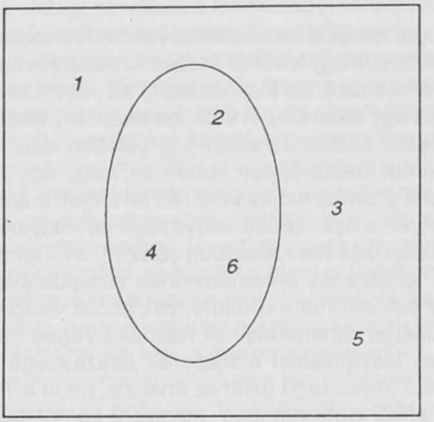
Statisztikai szemlélet kialakítása az iskolában

Érdemes kissé meggondolni, hogyan is alakult ki az a tananyag, amelyet matematika címszó alatt jelenleg tanítunk az iskolában. Az őskor embere a természet erőivel állt szemben, a jelenségek bonyolultak és félelmetesek voltak számára. (Sokszor ma is azok.) Eleinte nagyon sok volt a véletlen, a meglepő jelenség, amelyeket nem tudott megmagyarázni. Később számos természeti jelenség magyarázatára rájöttek, a véletlen jelenségek terén a „rendteremtéssel" azonban még a középkorban sem tudtak megbírkózni. A természet látványának összetettségéből, a bonyolult konfigurációkból sokkal előbb bukkant elő a szám fogalma, majd az egyenes, a kör, az elemi alakzatok fogalma, az algebra, az egyenletek valamint a mérés tana, a geometria, a függvények fogalma, mint a véletlen jelenség, vagy a valószínűség fogalma. Sem az ókorban, sem a középkorban nem tudtak mit kezdeni a véletlen világával. Csak az újkor embere, a reneszánsz korában jutott azokra a nyomokra, amelyekből néhány évszázad folyamán kialakult a valószínűségszámítás.A valószínűségszámítás megszületése után a legújabb korszak embere viszonylag gyorsan képessé vált az addig megfoghatatlan jelenségek megragadására, a véletlen folyamatok egzakt leírására, gyakorlati feladatok hosszú sorának megoldására. De nem a gyakorlati élet, a termelés szükségletei vezettek a véletlen tudományának felfedezésére, hanem a szerencsejátékok kockázatának vizsgálata került avatott matematikusok kezébe Franciaországban. Angliában a hajórakományok biztosítási díjának számítása, a tengeri katasztrófák, kalóztámadások kockázatának meghatározása vezetett ugyanazokra az eredményekre,mint a franciáknál a kockajátékban mutatkozó véletlen törvényszerűségek vizsgálata. Nem lehet célunk itt vázolni azt a hosszú fejlődési utat, amelyet a valószínűségszámítás megtett a szerencsejátékoktól a természeti jelenségek, véletlen folyamatok egzakt matematikai leírásáig, a természettudományok számos nagyszerű eredményének (atomenergia felszabadítása, űrkutatás stb.) lehetővé tételéig, a különböző szaktudományok fejlődésének előmozdításáig, a gazdasági élet modelljének leírásáig. Mint *Vincze István* írja (1)-ben: „a véletlen világában már nem a véletlen uralkodik".

Az iskolai oktatásban sokat tehetünk a valószínűségszámítás és annak gyakorlati alkalmazása, a matematikai statisztika megalapozására. Ehhez kívánok vázolni néhány gondolatot.

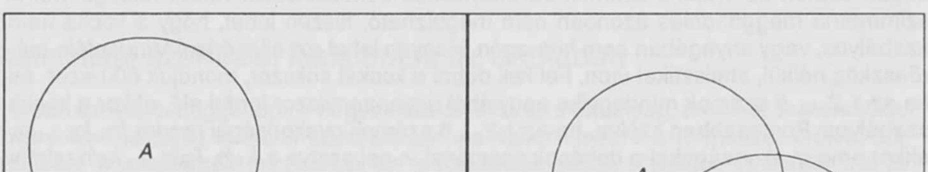
Minthogy a tanulók megismerik a halmaz fogalmát és a halmazokkal való műveleteket, ezek konkrét alkalmazásaként nem nehéz bevezetni egy kísérlet összes kimeneteleinek fizikailag megkülönböztethető eredményeinek halmazát az alaphalmazt, az „elemi események terét", amelynek minden részhalmaza egy esemény. A véletlen esemény matematikai modellje tehát a halmaz. Minél több példát célszerű mutatni egy véletlen kísérlet összes kimeneteleinek halmazára, hiszen ennek értéke éppen abban áll, hogy egy jelenség „kísérlet" összes lehetséges kimenetelét számba tudjuk venni és fel tudjuk mérni, hogy ezek közül valamilyen szempontból melyek a számunkra kedvezőek és melyek a kedvezőtlenek. A valószínűségszámítás megalapozásában általában célszerű a történeti utat követni, a kockadobás, érmedobás stb. lehetséges eredményeinek vizsgálatával, ténylegesen végrehajtva a kísérleteket szinte laboratóriumi körülmények között vizsgálhatjuk a véletlen törvényszerűségeit. Ha a kísérlet kimeneteleinek halmaza véges halmaz, akkor ennek részhalmazaira vonatkozó leszámlálási módszerek összessége a kombinatórika. Ennek megismertetése alapvető fontosságú mind az analízis, mind a valószínűség szempontjából. A modern matematikai statisztikában egyszerű kombinatórikus megfontolások alapján igen hatékony statisztikai próbákat konstruáltak. Bizonyára nagy érdeklődéssel végeznének kísérletet a gyerekek különböző bolyongási problémák vizsgálatára, amelyeknél egyszerű „fej vagy írás" játék eredményeinek szemléltetésére egy bábut tologatnának a számegyenes egész értékű pontjain, az origóból indítva a bábut. A legtöbb valószínűségszámítási könyvben számos ilyen jellegű példa található. A valószínűség fogalmának megértése természetesen számos tanulónak problémát okozhat. Azt általában a szimmetria-meggondolás alapján könnyen belátják, hogy érmedobás esetében mind az „írás", mind a „fej" dobásának valószínűsége 1/2, vagy hogy a kockadobás esetén az 1,2,...,6 számok bármelyikének bekövetkezési valószínűsége 1/6. A szimmetria meggondolás azonban nem megbízható, hiszen lehet, hogy a kocka nem szabályos, vagy anyagában nem homogén. Hogyan lehet ezt ellenőrizni Mindenféle mérőeszköz nélkül, statisztikai úton. Fel kell dobni a kockát sokszor, mondjuk 600-szor és ha az 1,2,....,6 számok mindegyike nagyjából ugyanannyiszor fordul elő, akkor a kocka szabályos. Pontosabban szólva, ha az 1,2,...,6 számok gyakoriságai rendre $k_1, k_2,...,k_6$, akkor eme gyakoriságokat a dobások számával, n-nel osztva a $k_1/n, k_2/n,....,k_6/n$ relatív gyakoriságok mindegyike az 1/6 érték közelében lesz. Ha n értékét még nagyobbra választjuk, akkor az egyes számok relatív gyakoriságai még kevésbé térnek el az 1/6 értéktől, mindegyik szám relatív gyakorisága az 1/6 érték körül ingadozik és meglepő stabilitást mutat. Azt a számot, amely körül egy esemény relatív gyakorisága ingadozik, az illető esemény valószínűségének nevezzük. Ha pl. A_6 jelöli azt az eseményt, hogy a dobás eredménye 6 pont, akkor $P(A_6)=1/6$. Azt a tényt, hogy az A_i esemény k_i/n relatív gyakorisága nagy n esetén alig tér el az 1/6 valószínűségtől, a nagy számok törvényének nevezzük. A gyakorlatban tulajdonképpen soha nem tudjuk egy esemény valószínűségét megismerni, meg kell elégednünk a relatív gyakorisággal, ami lényegében százalék-számítás (!), amit egyébként is tanulnak a gyerekek. A valószínűséggel is úgy vagyunk, mint a tömeg meghatározásával. Ha egy kb. 10 dkg tömeget analitikus mérlegen többször megmérünk, akkor meglepve tapasztaljuk, hogy mennyire különböző eredményeket kapunk. A mérés alapján nem tudjuk pontosan, hogy mennyi is valójában a test tömege, de ha sok mérési eredmény számtani közepét képezzük, az jól közelíti a test tömegét. A tömeget tehát statisztikai úton, valamely esemény valószínűségét szintén statisztikai úton, a relatív gyakoriság segítségével közelítjük meg. Elméleti úton nem lehet „kitalálni" egy egyszerű esemény valószínűségét, azt meg kell mérni statisztikai úton. Ez az egyszerű, vagy elemi események valószínűségére vonatkozik. Más a helyzet az összetett események valószínűségével, amely összetett események több egyszerű esemény uniójaként, vagy más néven összegeként állnak elő. Ha felrajzoljuk a kockadobás kísérletének „eseményterét", az összes elemi kimetele halmazát jelöljük I-vel, akkor mint említettük ennek bármely részhalmaza egy esemény, amelyet latin A,B,C,...nagy betűkkel jelölünk. Magát az I alaphalmazt biztos eseménynek nevezzük.

Ha pl. A az az esemény, hogy a dobás eredménye páros szám, azaz A= {2,4,6} , akkor az A esemény relatív gyakoriságát már nem kell nagyszámú dobás regisztrálásával leszámolni. A gyerekek hamar rájönnek, hogy az A esemény relatív gyakorisága a benne levő elemi események relatív gyakoriságainak összege. A binomiális-tétel segítségével megmutathatjuk, hogy a kockadobás kísérleténél az összes lehetséges események száma 2^6. Ekkor azt is megmutathatjuk, hogy minden olyan kísérletnél, amelynek véges *n*-számú kimenetele van, a lehetséges események száma 2^n.



1. ábra

A relatív gyakoriság tulajdonságainak vizsgálatával eljutunk a valószínűségi axiómákhoz. A lényeg annak megértetése, hogy amikor események valószínűségéről beszélünk, a halmazokhoz számot rendelünk. Ez nem ismeretlen a gyerekek előtt, hiszen amikor intervallumok hosszát síkidomok területét mérjük, akkor is ez történik, lényegében tehát halmazfüggvényt értelmezünk. A valószínűség ugyanúgy halmazfüggvény mint pl. a terület, hiszen a valószínűség is mérték, egy esemény százalékos bekövetkezési gyakoriságának mértéke. Ha alaphalmaznak valamely egységnégyzetet választunk, akkor a tanulók könnyen belátják, hogy ennek bármely részhalmaza kisebb területű mint 1. Azt is jól szemlélik, hogy diszjunkt



$T(A+B) = T(A) + T(B)$ mivel $AB = \varnothing$ $\quad$ $T(A + B) = T(A) + T(B) - T(AB)$

2. ábra

halmazok, pl. körök halmazelméleti összegének területe a területük összegével egyenlő, ha viszont a halmazoknak van közös része, akkor más a helyzet.

Ugyanezt intervallumokon is megmutathatjuk. Mindezek fejlesztik a gyerekek fantáziáját Ha az egységnégyzetre véletlenszerűen pontokat szórunk, ugyanezek a törvényszerűségek érvényesülnek a relatív gyakoriságokra is.

Alapvető fogalom a véletlen változó, vagy valószínűségi változó fogalma. Az könnyen megérthető, hogy a kockadobás eredménye az X valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei az 1,2,3,4,5,6 számok, amelyek mindegyikét 1/6 valószínűséggel veszi fel.

X	1	2	3	4	5	6
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

A mellékelt táblázattal máris megadtuk az X valószínűségi változó eloszlását.

Játszhatunk olyan játékot is, hogy egy tanuló dobálja a kockát, és minden dobás után annyi forintot adunk neki, ahány pontot dobott, – csakhogy! – minden dobás előtt le kell tenni az asztalra valamennyi forintot! Kérdés, hogy hány forintot tegyünk le? Ehhez ki kell számítanunk a nyeremény várható értékét.

$$E(X) = (1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}$$

Úgy gondolom, hogy a matematika tanárok fantáziája megtalálja az utat a valószínűségszámítás elemi fogalmainak érdekes bevezetéséhez. Például a normális- vagy Gauss-eloszlás megismertetéséhez lemérhetjük 100 tanuló testmagasságát, legyenek ezek $x_1, x_2, \dots, x_{100}$

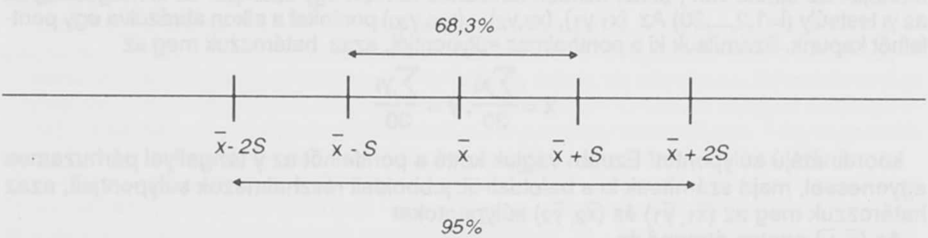
Számítsuk ki az

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{100}}{100}$$

számtani közepet, valamint az

$$S = \left(\frac{\sum_{1}^{100} (x_1 - \bar{x})^2}{100} \right)^{\frac{1}{2}}$$

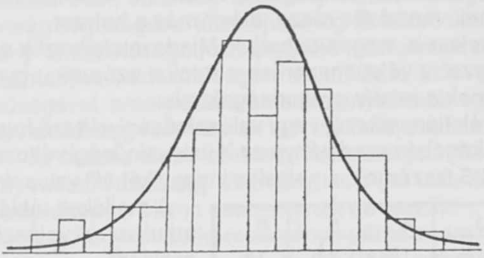
empirikus szórást. Ha az $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ értékeket a számegyenesen ábrázoljuk, azt fogjuk tapasztalni, hogy az $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ intervallumba a magasságok kb 70%-a



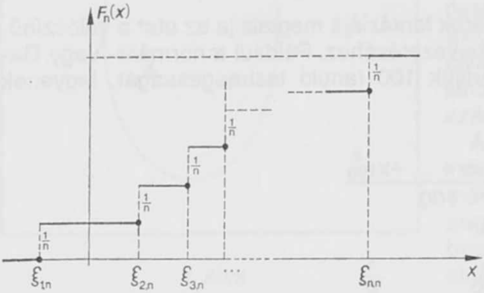
az $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ intervallumba a magasságok 95%-a esik, tehát 100 tanuló közül csak 4-5 gyerek magassága esik a kétszórásnyi sugarú intervallumon kívül.

Ezzel máris fontos statisztikai törvényszerúségre találtunk. Ha a számgyenest az ponttól indulva alkalmasan választott (mondjuk 5 cm-es) részintervallumra osztjuk és minden részintervallumra egy téglalapot rajzolunk, amelynek területe arányos az illető intervallumba eső pontok relatív gyakoriságával,akkor a kapott relatív gyakorisági hisztogram kízelítőleg egy harang görbét illusztrál, amely a normális sűrűségfüggvény.

Mivel a téglalapok területének összege 1, a tanulók természetesnek veszik, hogy a sűrűségfüggvény alatti terület egységnyi. Ha a számegyenesre felmért $x_1, x_2, \dots x_{100}$ érté-



kek segítségével megszerkesztünk egy lépcsős függvényt, amelynek mindegyike x_i ponttban $\frac{1}{100}$ nagyságú ugrása van és monoton nem csökkenő (célszerű milliméterpapírt használni és 10 cm egység esetén $\frac{1}{100}=1$ mm.), akkor az így kapott $F_n(x)$ tapasztalati eloszlásfüggvény (ahol n=100) értéke tetszőleges x értékre megadja az x-nél kisebb magasságok relatív gyakoriságát.



Az $F_n(x)$ függvény segítségével tetszőleges (a,b) intervallum választásával megkapjuk az illető intevallumba eső magasságok relatív gyakoriságát, ami az $F_n(x)$ függvény növekménye az adott intervallumon. Az ilyen „játékos" ábrázolgatás elősegíti annak megértését, hogy a testmagasság, jelöljük X-szel, valószínűségi változó amely a véletlen játéka folytán különböző gyerekeknél különböző értékű, a véletlen játékában azonban statisztikai törvényszerűségek uralkodnak.

Az iskolában a tanulók különböző függvényekről tanulnak, a gyakorlatban azonban nem látják sok hasznát, túlságosan absztrakt számukra a függvény. Azt sem értik például, hogy miért van szükség az egyenes egyenleteinek különböző alakjaira, vagy egyáltalán hogyan lehet meghatározni, hogy két mennyiség között milyen függés van, pedig ez volna a legfontosabb. A gyakorlatban rendszerint megelégszünk a kapcsolat lineáris közelítésével. Ha pl. keressük a kapcsolatot a tanulók testsúlya és magassága között és az osztályban mondjuk 30 tanuló van , akkor minden tanulóhoz tartozik egy számpár az xi magasság és az y_i testsúly (i=1,2,...,30) Az (x_1,y_1), (x_2,y_2)...,(x_{30},y_{30}) pontokat a síkon ábrázolva egy pontfelhőt kapunk. Számítsuk ki a ponthalmaz súlypontját, azaz határozzuk meg az

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{30},\ \bar{y}=\frac{\sum y_i}{30}$$

koordinátájú súlypontot! Ezután vágjuk ketté a pontfelhőt az y tengellyel párhuzamos egyenessel, majd számítsuk ki a baloldali-ill. jobboldali részhalmazok súlypontjait, azaz határozzuk meg az $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ és $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ súlypontokat

Az $(\bar{x}, \bar{y})$ ponton átmenő és

$$\frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{\bar{x}_2-\bar{x}_1}=m$$

iránytangensű egyenes, azaz az

$$y=\bar{y}+\frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{\bar{x}_2-\bar{x}_1}(x-\bar{x})$$

egyenes *Wald Ábrahám* vizsgálatai alapján a lineáris kapcsolatot bizonyos értelemben legjobban leíró függvény, egyfajta regressziós egyenes. Ennek alapján a magasság ismeretében a testsúly jól becsülhető (legalábbis átlagban) és nem kell hozzá tudni mást, mint az egyenes egyenletét. Azt hiszem, hogy a matematikát oktató kollégák számos hasonló példát tudnak konstruálni. A valószínűségi alapok oktatása után a jelenleg oktatott anyagban számos helyen találunk valódi alkalmazási lehetőségeket, amelyekkel még az ismétléseket is színesebbé tehetjük.

A fentiekkel mindössze néhány ötletet kívántam nyújtani a statisztikus szemlélet megalapozásához. Természetesen számos különböző út járható ezen a téren, egyáltalán nem baj, ha valaki egészen más utat követ. A baj csak az, ha szó sem esik a valószínűségszámításról és statisztikai módszerekről az iskolában.

IRODALOM

(1) *Vincze István:* A véletlen világában már nem a véletlen uralkodik (Nagy pillanatok a matematika történetéből 8.fejezet), Gondolat, Budapest, 1981

(2) *Rényi Alfréd:* Ars Matematica, Magvető Kiadó, Budapest, 1973

(3) *Reimann József:* Valószínűségelmélet és matematikai statisztika mérnököknek Tankönyvkiadó, Budapest, 1992