Kaleidoszkóp a geometria tanításáról

FATALIN LÁSZLÓNÉ

A társadalmi-gazdasági élet fejlődése, az emberi tevékenység hatékonyabbá és egyben bonyolultabbá válása következtében ma már az oktatás során átadandó ismeretek mennyisége láncreakciószerűen nő. Az információrobbanás okozta feszültségek megnyugtató módon nem oldhatók fel sem az oktatásra fordítandó idő mennyiségi növelésével, sem további szakosodások közbeiktatásával. E probléma megoldására hatékonyabb módszereket, tantárgystruktúrákat kell keresnünk a közoktatásban, és folyamatosan felül kell vizsgálnunk a tanítandó-tanulandó ismeretanyagot azok szükségessége szempontjából is.

A kialakulóban levő új oktatási rend nemcsak nagyobb teret enged az egyéni megoldásoknak, hanem egyre inkább kikényszeríti azokat és egyben a felelősség nagyobb részét is az egyes tanárokra, iskolai közösségekre hárítja át. Az elsajátítandó ismeretanyag és a rendelkezésre álló idő közötti ellentmondás feloldásához a különböző tantervek, alternatív tankönyvek és egyéb segédeszközök segítséget nyújthatnak, végsősoron azonban a tanárra hárul az a döntés, hogy a nemzeti alaptantervben előírt ismeretanyagot milyen megvilágításban, koncepcióban, illetve annak egyes részeit milyen mélységben tanítsa. Ez a tanár számára egyre nehezebb dilemmát jelent.

Egy adott szaktárgy, témakör tanítása előtt rendkívül fontos a tudományág áttekintése tudománytörténeti szempontból, különös tekintettel arra, hogy az adott tudományág történetében milyen új gondolkodásformák, módszerek, rendszerszemléletek születtek, hiszen ezek mérföldkőként jelzik a tudományos haladás és a hatékonyabb megismerési módszerek kialakulását. A történeti szemlélet szerepét nem lehet eléggé hangsúlyozni. A feszített tempó eredményezte feszültségek enyhítésére az oktatásban szinte automatikusan kihagyjuk a „fejlődés zsákutcáit", sőt a tudományos megismerés rögös útjait is kiegyengetjük. Ez gyakran olyan jól sikerül, hogy közben gyakran teljesen elveszítjük a kapcsolatot a valósággal. Természetesnek tűnik, hogy egy-egy szaktárgy tanítása során a főbb gondolatokon és a mindennapi életben is szükséges, hasznos ismereteken keresztül alakítsuk a diákok szemléletmódját és közben ne vesszünk el az adott szaktudomány sajátosságaiból adódó részletekben. A hagyományos szaktudományokat tükröző tantárgystruktúránkat érdemes lenne következetesen áttekinteni abból a szempontból, hogy az egyes szaktárgyak tananyaga hogyan mutatja meg az adott szaktudomány fejlődésének mérföldköveit, azok gondolati-ismereti tartalmát. Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül megkísérlem felvázolni a matematika egyik klasszikus ágának, a geometriának olyan meghatározó jellegű alapgondolatait, melyek alapjaiban terelték új irányba a tudományos kutatások irányát.

Mérföldkövek a geometria fejlődésében

A geometria fejlődésének történetét bizonyos jellegzetes sajátosságok alapján különböző szakaszokra lehet felosztani. Természetesen ilyen csoportosítás is többféle szempont szerint készülhet. A geometria fejlődéstörténetében kialakult és széles körben alkalmazott, a maguk korában forradalmian új gondolkodásformának számító, azóta már kikristályosodott módszerek alapján alkalmazhatjuk például a következő felosztást:

1. szintetikus geometria
2. analitikus geometria
3. axiomatikus geometria
4. transzformáció-szemlélet

A geometria a társadalom szükségleteiből fakadt, s a különböző komoly gazdasági jelentőségű gyakorlati feladatok szükségessé tették az egyre magasabb szintre történő fejlesztését. (Az elnevezése is ezt jelzi, a görög eredetű geometria szó ugyanis földmérést jelent.) Kezdetben (ókori Egyiptom, Babilónia) főleg tapasztalati szabályok jelezték a megszerzett tudást, s ezek egy része is durva, közelítő jellegű volt. Megfelelő menynyiségű tapasztalati úton szerzett ismeret felhalmozódása után az ókori görögök már a különböző állítások között tudatosan kerestek logikai összefüggéseket, kapcsolatokat, a különböző szabályokat elméleti úton vezették le. Az ókori matematika enciklopédiája, *Euklidész: Elemek* című híres munkája (ie.300 körül) eleve elfogadott alaptételből (axióma) vezeti le, rendszerezi az addig összegyűlt ismeretanyagot. Ezen szintetikus geometriai módszerre jellemző az intuitív gondolkodás, a feladatok megoldásában pedig a sziporkázó ötletesség. A szintetikus geometria ezen területét a szakirodalom elemi geometria néven tartja számon. A szintetikus geometria egy másik ága a projektív geometria, melynek bizonyos elemeit már ismerték Euklidész matematikus kortársai is. A kezdetben alkalmazott módszer szintetikus volt, hiszen csupán geometriai fogalmakat vettek igénybe, ugyanis *Fermat* és *Descartes* felléptéig a geometriában nem alkalmaztak következetesen algebrai módszereket. A projektív geometria alapjai a szintetikus geometria keretein belül születtek meg. A projektív geometria kialakulását azok a megfigyelések segítették elő, amelyek a képzőművészetben a térbeli alakzatok perspektivikus ábrázolásával kapcsolatban keletkeztek. Az ókori geometria projektív elemeinek életre keltése és kibővítése *Desargues* (1593-1662) nevéhez fűződik. A geometria ezen ága a geometriai alakzatoknak olyan tulajdonságaival foglalkozik, amelyek centrális vetítéskor és egyenessel, illetve síkkal való metszéskor változatlanok maradnak. Időközben az analitikus módszer térhódításának köszönhetően a projektív geometria tételeinek egy részét már koordinátás módszer segítségével is bizonyították. A szintetikus geometria körébe azonban a projektív geometria csak azon területe esik, amely nem használja fel a koordináta-rendszert a tételek bizonyításához. A projektív geometriai feladatok sok ötletet kívánnak, alkalmazásuknál fogva is igen érdekesek.

A XIX. században folytatódott a projektív geometria fejlődése, s *Monge* francia matematikus megalapozta az ábrázoló geometriát a projektív geometria új ágaként.

A következő forradalmian új gondolat a kapitalizmus kialakulásának idejére esik. A XVII. században indult el diadalútjára Descartes és Fermat munkássága nyomán az analitikus geometria, mint a geometriai objektumok méreteinek, formáinak és egyéb tulajdonságainak számviszonyokkal történő kifejezési módszere. Elsőként történt meg a geometria és az algebra szerves összefonódása, következetes összekapcsolása a matematika történetében. Descartes használta először a koordináta-rendszert, ami a geometriai feladatok algebrai megoldását tette lehetővé, s így lényegében általános módszert adott a geometriai feladatok megoldására. Ez volt tulajdonképpen a geometriában az analitikus módszer fénykorának a kezdete. A XIX. század elejére az analitikus geometria képes volt minden, egyenlettel leírható geometriai alakzat vizsgálatára. Az ír *Hamilton* és a német *Grassmann* felfedezéseinek köszönhetően új fogalmak formálták tovább az analitikus geometriát. Kialakult a vektor fogalma, amely a matematikán kívül más szaktudományokban is (fizikában, közgazdaságtanban) hatékony segédeszköznek bizonyult. Forradalmi változást jelentett a geometriák fejlődésében a párhuzamossági problémakör megoldása, a nem euklideszi geometriák megalkotása, amelyet *Bolyai János* szintetikus, *Lobacsevszkij* pedig analitikus úton oldott meg. Ezzel előtérbe került az axiómarendszerek vizsgálata, ami egyben a geometria alapjait érintő új gondolkodási formát is jelentette. Ennek az ún. axiomatikus módszernek a kidolgozása *Hilbert* nevéhez fűződik. Hilbert a Bolyai és Lobacsevszkij által nyitott új korszakot lezáró, az 1899-ben kiadott *A geometria alapjai* című művében a geometria axiómákra épült, rendszerezett tárgyalását adja, s a XIX. század minden geometriai vívmányát tartalmazza. Az axiomatikus geometria számos nem vitatható előnye mellett, egy igen nagy hátránnyal rendelkezik. Egy axiomarendszer felvétele tulajdonképpen meghatározza az igaz tételek halmazát, amelyekhez esetenként többféle logikai úton is el lehet jutni, de a logikai út keresésére semmilyen információt, módszert nem ad.

A XIX. században a geometria fejlődésében forradalmi gondolatnak számít *F. Klein* német matematikus *Erlangeni programja* (1872), amely az első olyan jelentős geometriai alkotás, amelyről nem mondható el, hogy – akár csíráiban is – már az ógörögöknél is létezett. A program alapgondolata az, hogy az egyes klasszikus geometriák jellemezhetők transzformáció csoportjukkal, röviden azonosíthatók egy csoporthatással. Minden olyan alaphalmazra építhető új geometria, amelyen értelmezhető valamilyen transzformációcsoport. Klein a geometriai tételek aszerinti osztályozását ajánlja, hogy az általuk tárgyalt tulajdonságok milyen geometriai transzformációval szemben maradnak változatlanok, invariánsok. A Klein-féle osztályozási elv szempontokat adott új geometriák megalkotásához. E szemlélet hatása a geometrián kívül a matematika más ágaiban is és a fizikában is mind a mai napig nyomon követhető.

Vannak azonban olyan geometriák is, (Riemann-terek), amelyek leírására jelenleg egyik módszer sem alkalmazható. Az eddigiekben említett felosztás nem tekinthető teljesnek, még akkor sem, ha a geometria fejlődését csak a századfordulóig kívánjuk nyomon követni. Már a XIX. század közepén megjelent egy másik általános elv, melyet a metrika elvének is szokás nevezni. Ennek ellenére érdemes megvizsgálni, hogy a közoktatásban e négy megközelítési módszer eddig milyen hangsúlyt kapott, illetve mekkora teret nyerhet egy-egy újabb tanterv kidolgozása során.

Szintetikus geometria

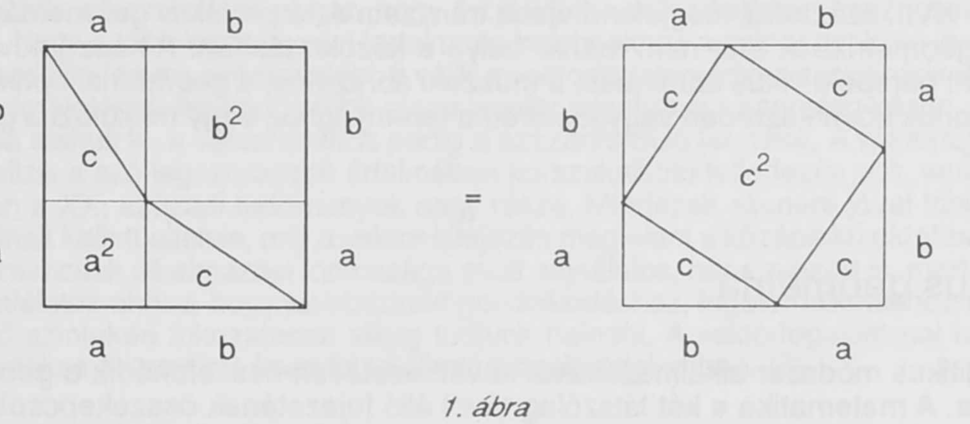
A geometria tanításában 2000 éven át uralkodott a szintetikus módszer.

Sok helyütt a világon még nem is olyan régen Euklidész Elemek című művét tanították az iskolában a matematika órán. A szintetikus módszer alkalmazása kétségkívül fejleszti az intuitív gondolkodást, hiszen maga a módszer is éppen ezen alapul. Az intuitív gondolkodást általában meglehetősen nehéz fejleszteni és számonkérésével is komoly gondok vannak. A geometria szemléletességénél fogva vitathatatlanul alkalmas terület e feladatra. Egy-egy tétel bizonyításához, feladat megoldásához feltétlenül szükség van az ötletességre. A felhasznált szemléletes ötletekre a tanulók gyakran rácsodálkoznak, esetenként egy szellemes gondolat képes magával ragadni képzeletüket is. A saját ötletek pedig heuréka-élményt adnak, ami további kutatásokra, ismeretszerzésre sarkallja őket. Közben azt is megtanulhatják, hogy az ötlet szerepét ne túlozzák el, hiszen egy-egy zseniális ötlet önmagában nem elegendő a feladat megoldásához, szükség van a teljes gondolatsor szabatos kifejtésére is. Az alábbi két ismert „bizonyítás" sziporkázó ötletessége egyrészről elkápráztathat bennünket, másrészről viszont rávilágít a szabatosság fontosságára is, jól illusztrálva az elmondottakat. *(1. és 2. ábra)*

Tétel

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bizonyítás



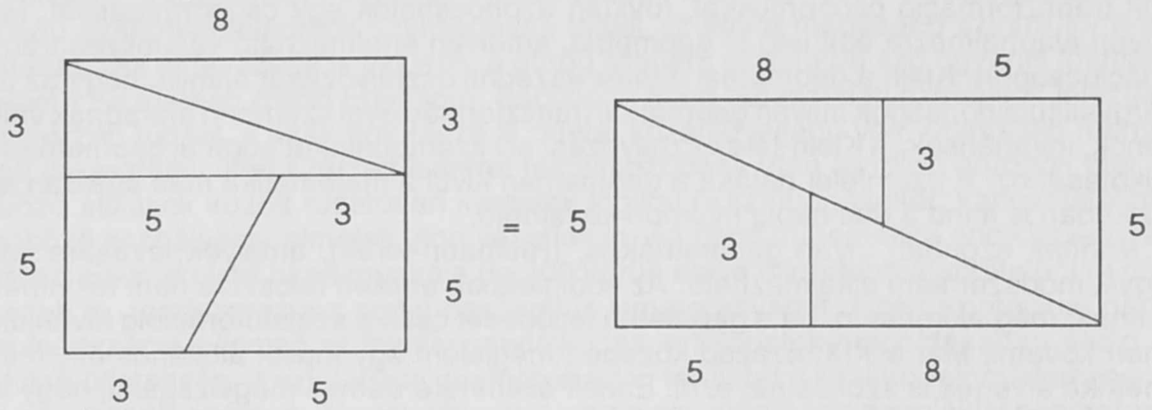
1. ábra

A számonkéréssel persze gondok vannak. Ennek oka az, hogy az intuitív gondolkodás objektívebb mérése jelenleg csupán csak bizarr elképzelés lehet. Az elemi geometriai témakörökre vonatkozó dolgozatok összeállításakor és értékelésekor szembe találjuk magunkat e dilemmával. A szintetikus módszer lehetővé teszi a különböző témakörök közötti tallózást, nem kényszeríti ki egy szisztematikus felépítés következetes végigvitelét.

Tétel

64 = 65

Bizonyítás



2. ábra

Ez egyben előnye és hátránya is e módszernek, hiszen szabadabban válogathatjuk ki és állíthatjuk össze az általunk szükségesnek ítélt témaköröket, feladatokat, ugyanakkor éppen a merevebb hierarchikusabb felépítettség hiányából adódóan a tananyag szétfolyóbbá válik. A geometria oktatásában jelenleg többségében a szintetikus geometria legismertebb területéről, az ókori görögök által kidolgozott ún. elemi geometriából szerepelnek tételek és feladatok. Az elemi geometriához kapcsolódó tételek és feladatok középpontba kerülését az elmondott előnyök indokolhatják ugyan, de egy ilyen szemlélet helyességéről nem győzhet meg bennünket. A matematikában ugyan nem illik az egyes tételek, elméletek gyakorlati hasznosságáról beszélni, az oktatásban viszont már a bevezetőben is említett szempontok miatt egyfajta prakticista szemléletnek alapvető fontosságú szerepe van. (Az intuitív gondolkodást nemcsak e témakörök fejlesztik és a szabatosság igénye sem az elemi geometriához kötődik feltétlenül.) Az elemi geometriai feladatok jelentős része szerkesztési feladat. A háromszög-szerkesztési feladatok nagy része például nem elégíti ki a gyakorlati hasznosság kritériumát. Hány és hány titkárnő, tanár, közgazdász,...stb. emlékeiben kísért a félelmetes matematika, amihez sohasem értett, mindig képtelen volt – ma is az – megszerkeszteni egy háromszöget három olyan adatból, amit csak egy elvarázsolt elme agyalhatott ki. Egyes szerkesztési feladatoknak természetesen vannak közvetlen gyakorlati alkalmazásai is. A látókörív, a hátrametszés például egyértelműen ilyen, még akkor is, ha ezt az eljárást legfeljebb a szakemberek egy szűkebb csoportja használja.

Az elemi geometria tanításában helyenként megfigyelhető a szerkesztési feladatok túltengése, ami azért is meglepő, mert ugyanakkor a szintetikus geometria fejlődéstörténetében a XVII. századtól megjelenő újabb irányzatnak, a projektív geometriának és az ábrázoló geometriának már nem marad helye a közoktatásban. A képzőművészetben alkalmazott perspektívikus ábrázolás, a műszaki ábrázolás, a geometriai optika stb. tárgyalása ennek következtében vagy kimarad a tananyagból, vagy nélkülözi a geometriai alapokat.

Analitikus geometria

Az analitikus módszer alkalmazásával következetesen összefonódik a geometria és az algebra. A matematika e két látszólag távol álló fejezetének összekepcsolása varázserővel bír. A geometria tanításában ezt nap mint nap tapasztalhatjuk, a geometriához nem értő tanulók jó része megtáltosodik e fejezethez érkezve. Ez érthető, hiszen az ötleteket igénylő geometriai szerkesztési illetve bizonyítási feladatok az analitikus módszer következtében szisztematikusan egyenletek felírására és megoldására illetve algebrai azonosságok igazolására redukálódnak. A feladatmegoldások jól algoritmizálhatóak, néhány mechanizmus elsajátításával már eredményesen tudnak dolgozni a tanulók.

A koordináta-geometriai ismeretek nemcsak a geometriai feladatok algabrai megoldását teszi lehetővé, hanem e módszert fordított irányba alkamazva az egyenletrendszerekről is szemléletes képet alkothatunk magunknak, sőt grafikus úton meg is oldhatjuk azokat. Ez utóbbi tevékenység a túlzott, sokszor érthetetlen pontossági igények miatt helyenként háttérbe szorul, holott az abszolút pontosságra törekvés nem lehet kellő indoka a gyakorlatban széleskörűen alkalmazott szemléletes grafikus megoldási mód elutasításának. Az analitikus geometria tanítása során erősíthetjük a „grafikus szemlélet" kialakulását is.Az analitikus geometriában rejlő szisztematikus módszer fejleszti az algoritmusszemléletet és jó támpontokat ad a számonkéréséhez is.

Emellett a szisztematikus módszereknek további előnyei is vannak, hiszen sok esetben csak ezek segítségével válnak megnyugtató módon megoldhatóvá a rendszerszinten jelentkező problémák. A geometriában ilyen típusú feladat például a különböző alakzatok szerkeszthetőségének kérdése. (Tudománytörténeti jelentőséggel is bíró közismert feladat például a szögharmadolás, a déloszi kockakettőzés és a kör négyszögesítésének problémája.) Szisztematikus módszer nélkül általában csak botor vállalkozásnak bizonyul az a törekvés, hogy igazoljuk egy-egy feladatról azt, hogy euklideszi szerkesztéssel nem oldható meg. Az analitikus geometria tanítása során a szerkeszthetőség kérdéskörére ha felszínesen is, de célszerű kitérni, hiszen példát mutathatunk olyan meggondolásokra, melyek elvezetnek annak belátásához, hogy valamilyen feladatnak bár van megoldása, de a megengedett lépések, eszközök felhasználásával e megoldáshoz nem lehet eljutni.

A középiskolai oktatásban nagy hangsúlyt kap a koordináta-geometria; a felvételi feladatsorok például elképzelhetetlenek koordináta-geometriai feladat nélkül. Talán éppen ez okozza, hogy a feladatmegoldások algoritmusának begyakorlásához az órákon is nagy számban szerepelnek ilyen feladatok, s ezek egy szint fölött igazából már nem a gondolkodást, hanem az egyenletrendszerek megoldásának kézügyességét fejlesztik. A geometria feladatok egyenletrendszerekkel történő megoldása a síkgeometriában ugyan nem okoz különösebb gondot, de térgeometriában a dimenzió növekedése miatt az egyenletrendszerekre támaszkodó megoldási módok már bonyolultabbá, esetenként átláthatatlanná válnak. (A probléma nehézségét már azon az alapfeladaton is érzékelhetjük, ha két sík metszésvonalának, azaz a két sík közös egyenesének egyenletrendszerét próbáljuk meg előállítani a megszokott alakba a két sík lineáris egyenletéből.) A térgeometriai feladatok megoldása során meggondolásainkat szinte mindig a vektorfogalom segítségével végezzük.

Az analitikus geometria oktatása során sokszor találkozunk olyan tárgyalási móddal, amely a vektorfogalmat méltánytalanul mellőzi. Ez sokszor hamis illuziót kelt, ami a további tanulmányokat is hátráltatja. Tipikus példa e szemléletmód következetes alkalmazására *Simionescu Analitikus mértan* című műve, amely Romániában a XI. osztály számára íródott és a vektorfogalom még csak említésre sem kerül benne.

Az ilyen irányú oktatási kísérleteket nemcsak az említett dimenzióbeli általánosítás problémája miatt kell zsákutcának minősítenünk, hiszen a matematika fejlődéstörténete és más szaktudományokban való alkalmazása is igazolja, hogy a vektor fogalmának központi szerepet kell biztosítanunk. Elegendő áttekinteni a vektorfogalom néhány fizikai, közgazdasági stb. alkalmazását ahhoz, hogy érzékeljük a vektorfogalom hasznosságát. Meggondolva, hogy a több komponenst tartalmazó fogalmaknak a vektor gyakran igen jó matematikai modellje, egyre nyilvánvalóbbá válik a vektorfogalom interdiszciplináris jellege is. A vektorok elméletének legegyszerűbb része a vektoralgebra is viszonylag későn, kb. másfél évszázada alakult ki, a vektoranalízis pedig a századforduló terméke. A vektoralgebra és a vektoranalízis a szó legszorosabb értelmében korszakalkotó felfedezés volt, enélkül elképzelhetetlen a XX. századi tudományok nagy része. Mindezek ellenére jóval több mint egy évszázadnak kellett eltelnie, míg a vektor kifejezés megjelent a középfokú oktatásban. E késedelem nemcsak alkalmazási fontossága miatt sajnálatos, hanem azért is, mert e fogalom elég szemléletes ahhoz, hogy az absztrakt gondolkodáshoz, fogalomalkotáshoz szükséges különböző szinteken fokozatosan végig tudjunk haladni. A vektorfogalommal tanításához számos értékes észrevétel, javaslat található a szakirodalomban. (3)

Transzformáció-szemlélet

Felix Klein a transzformációcsoportokon nyugvó gondolatait 1872-ben fejtette ki Erlangenben egyetemi székfoglaló előadásában. A transzformációcsoportok alig száz esztendő elteltével a matematika- tanítás középpontjába kerültek. Az 187O-es évek végén bevezetésre került tanterv előírta a geometriai transzformációk függvényként való tanítását és az egyes transzformációk fixelemekkel történő jellemzését követelte meg. A transzformációk tanításának ezen koncepciója a függvényfogalom elmélyítéséhez vezetett. A geometriai transzformációk pont-pont függvényként való felfogása matematikailag kétségtelenül helyes, de tanítása számos nehézséget hordoz magában. Ezek közül gyakran hajlamosak vagyunk megfeledkezni arról, hogy a tér és idő fogalmának kialakításához vezető hosszú absztrakciós folyamat egyik lényeges, nem magától értetődő mozzanata a testek mozgási és nyugalmi állapotának elkülönítése. A geometriai transzformációk két „statikus állapotot" ragadnak meg, a kezdeti és a végállapotot, miközben a „testek" mozgásának időbeli lefolyásától eltekintünk. Ez azonban csak az egyik gondolati nehézség a transzformáció fogalmának kialakításában, melyet még az is tetéz, hogy az euklideszi geometria transzformációi végtelen halmazokon értelmezettek és ráadásul e végtelen ponthalmaznak önmagára történő leképezéseiről van szó, különben a fixelemekről nincs értelme beszélni.

A transzformációk egymásután való alkalmazása, azaz az összetett függvény fogalmának konkrét használata is problémákat okozhat. A most említett pszicho-didaktikai nehézségek megoldásához a szakirodalomban bőven találunk részletesen kidolgozott javaslatokat. (2)

Az oktatásban alkalmazott transzformációszemlélet látszólag korszerű matematikai alapokon nyugszik. E hitünk azonban meginog, mihelyt összehasonlítjuk e szemléletet az erlangeni programmal, illetve annak más tudományokban is felhasznált gondolataival. A két felfogás összevetése nyomán pillanatokon belül kiderül, hogy Klein gondolatainak legfeljebb deformált változatát sikerült megragadnunk az oktatásban, miközben a tulajdonképpeni transzformációszemlélet alapgondolatát még csak meg sem érintettük.

Az erlangeni program lényegében a geometria transzformációcsoportokra épített definícióját adja meg a következő gondolatsor alapján:

1) Jelölje H a pontok alaphalmazát és legyen G a halmaznak egy transzformációcsoportja, azaz a H halmaz permutációinak egy részcsoportja.

2) A H halmaz részhalmazai, azaz az alakzatok között értelmezhető egy reláció a G transzformációcsoport segítségével, amely szerint két alakzat ekvivalens, ha van olyan transzformormáció a csoportban, amely az egyik alakzatot átviszi a másikba. Könnyű belátni, hogy az alakzatok között így értelmezett reláció ekvivalenciareláció. (A reflexivitás a transzformációcsoport egységelemének, azaz az identikus leképezésnek felhasználásával, a szimmetria az inverz transzformáció, míg a tranzitivitás a csoport művelet, azaz a transzformációk kompozíciójával látható be.)

3) Az ekvivalenciareláció, mint az egyenlőség matematikai megfogalmazása az alakzatokat osztályokba sorolja és a geometria feladata ennek az egyenlőségnek a jellemzése, azaz olyan invariánsok meghatározása, amely az azonos osztályba tartozó alakzatokra ugyanaz.E gondolat részletesebb kifejtésétől eltekintve csak a következő két észrevételre térek ki:

– a transzformációszemlélet alapgondolatának szerves részét képezi a fentebb leírt ekvivalencireláció,

– ezen alapgondolat nélkül az invariancia fogalma és ezen keresztül a természettörvények általános fogalma sem tárgyalható a természettörvényekkel szemben támasztott invarianciakövetelmény miatt.

Érdemes végignézni tananyagunkat abból a szempontból, hogy a matematikában a különböző relációk milyen mértékben kerülnek tárgyalásra, hiszen a reláció legalább olyan fontos alapfogalom, mint a halmaz fogalma, mindkettő meghatározásában rejtetten, vagy kimondva, de szerepel a másik fogalom is. A matematikában törekednünk kell azon fogalmak, szemléletek kialakítására, amelyek lehetővé teszik más szaktudományok általános jellegű fogalmainak megértését, mert ezek nélkül nincs meg a kellő alap ezek pontosabb kialakítására. (Így a fizikában elkerüljük a törvény fogalmának pontosabb leírását, a vektormező fogalma nélkül külön beszélünk elektromos, mágneses és gravitációs mezőkről, helyenként a mező fogalmát keverve a tér fogalmával...stb.)

Axiomatika

A szintetikus, az analitikus módszereken és a transzformációk fogalmán alapuló geometriai felépítéseknek nagy a szakirodalma, míg az axiómatikus módszer alkalmazásához jóval kevesebb javaslatot, észrevételt találhatunk. Ennek egyrészt az az oka, hogy a középiskolai tananyagban nem szerepel, másrészt számos, igen súlyos probléma van az alkalmazásával még egyetemi szinten is. Mindezek ellenére igen fontos kérdéskörnek érzem, mert ez a módszer alapvető a fogalmak, rendszerek meghatározásánál, kialakításánál. Az axiómatikus módszer geometriai alkalmazásával kapcsolatban a következő problémákat szokás kiemelni:

– Az eulidészi axiómarendszer bonyolult, több alapfogalom és alapreláció szerepel benne és az anyag felépítésében csak lépésről-lépésre, nagyon lassan lehet haladni hosszú időn keresztül.

– A középiskolában ehhez még hozzávehetjük azt is, hogy a tanulók számára a geometria szemléletessége, „magától értetődősége" zavaró momentum a bizonyítás szükségességének belátásában és a tétel bizonyításához felhasználható igazságok felismerésében.

– Többek véleménye szerint, a tanulók többsége, életkori sajátosságok miatt, nem képes arra, hogy felfogja az axiómatikus rendszer lényegét.

Az itt felsoroltak valóban fennálló, olyan súlyos problémák, amelyek kétségessé teszik a geometria tanításának effajta felépítését, különösen akkor, amikor az erlangeni program által megadott „transzformáció-szem-lélettel" könnyebb úton járhatunk. Ennek ellenére célszerűnek tűnik ezen módszer alkalmazhatóságával is foglalkozni, tudnillik teljesen más gondolkodásformát, rendszerszemléletet ad, mint az előző módszerek, továbbá megállapítható, hogy az emberiség megismerési folyamataiból ez a módszer, gondolkodásforma, rendszerszemlélet kristályosodott ki legáltalánosabb érvényességgel a „matematikai szigorúság" kritériumának is eleget téve.

Az axiómatikus módszer fogalmát nem szabad leszűkíteni arra a szemléletre, hogy az axiómák a valóságból absztrakcióval nyert általános igazságok és ezen alapokból kiindulva kell logikai úton eljutni a tételek megfogalmazásához és igazolásához. Ez a szemlélet lényegében azt jelenti, hogy a geometriát valójában euklidészi axiómarendszerként tanítanánk. Ebben az esetben mind a négy megfogalmazott probléma éreztetné hátrányát.Az axiómatikus módszer lényegét sokkal jobban tükrözi az a felfogás, mely szerint néhány dolgot (axiómát) elfogadva, ezekből a feltételekből logikai úton olyan következtetésekre lehet jutni, melyek az adott rendszerben érvényes igazságok. Ezzel közeledünk a matematikai logikához és ez a módszer játékosabb formában is alkalmazható. Gondoljunk például a szokásos logikai feladatokra. Szinte minden tanuló kedveli ezt a feladattípust, és tudja hogy egy feltett kérdésre nemcsak igen és nem válasz adható, hanem vannak ún. eldönthetetlen kérdések is, amelyek általános megfogalmazása és bizonyítása már századunk matematikájának egyik csúcsteljesítménye. Ez a fajta szemlélet lehetővé teszi, hogy a geometriát az euklidészi axiómarendszertől elrugaszkodva építsük fel. Az elmondottak alapján tehát olyan axiómarendszert célszerű keresni, amelyben egyrészt kevés alapfogalom és axióma szerepel, valamint gyorsan lehet az anyagot felépíteni, másrészt a struktúra geometriai jellegű, de csak olyannyira, hogy ez a szemlélet ne legyen zavaró. A véges geometriák ezen kritériumoknak eleget tesznek. Alkalmazásuk további előnyeinek részletesebb kifejtésétől most eltekinünk.

Érdemes megvizsgálnunk a matematika tananyagot abból a szempontból is, hogy milyen arányban szerepelnek benne véges és végtelen, valamint diszkrét és folytonos struktúrák. A végtelen és folytonos struktúrák aránytalanul nagyobb hangsúlyt kapnak, ami sok felesleges tanítási problémát is okoz és az arányoknak ezt az eltolódását a számítógépek korában a XX. századi tudomány sem indokolja.

JEGYZET

(1) *Molnár Emil:* A matematikai és fizikai térfogalom kapcsolatáról és világnézeti vonatkozásáról. ELTE Sokszorosító Üzem, 1972.

(2) *Rédling Elemér:* Geometriai transzformációk I-III. Tolna Megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1977.

(3) *Fatalin Lászlóné:* A vektorfogalom kialakításáról. Iskolakultúra, 1992/3.