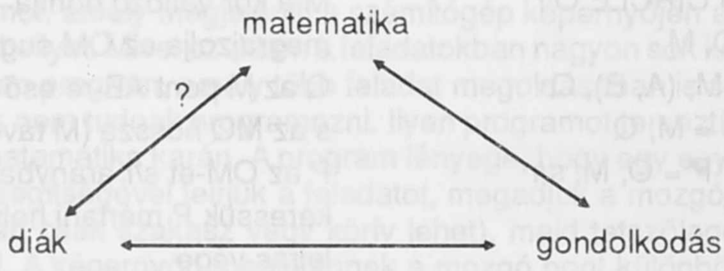
Problémamegoldás a matematikában

MOHAY PÉTER

A következőkben összefoglalom a matematikai problémamegoldásnak azokat a mozzanatait, amelyek a tanításban szerzett tapasztalataim alapján a leginkább hatékonynak bizonyultak a tanulók gondolkodásának, problémamegoldóképességének fejlesztésében. Azt fogom hangsúlyozni, hogy érdemes tudatosítani tanulóinkban ezeket a lépéseket, amelyek majd segítségül szolgálhatnak számukra esetleg megoldhatatlannak tűnő feladatok esetében is.

A gondolkodás irányítása

A diákok nagy része szeret gondolkodni, szereti a szellemi gyakorlatokat. A matematika az egyik olyan tárgy, amelyben a gondolkodásnak kitüntetett szerepe van; ugyanakkor nagyon sok diák nem szereti, úgy érzi, nem tudja a matematikát.



Hogyan oldható fel ez az ellentmondás? Ha az órán a tanuló csak definíciókat és tételeket hall és ezeket nem tanulja meg, akkor mondhatja, hogy nem tudja. Nem ezekről, hanem azokról szeretnék szólni, akik úgy érzik, hogy számukra mindig minden matematika feladat nehéz, soha nincs ötletük, ami egy-egy megoldáshoz szükséges lenne.

Néhányat külön kiemelek az I.-X. számozottak közül.

I. *Tipikus nehézség:* gyakran, főképpen a gyengébb diákok nem tudják világosan szétválasztani az adatokat az ismeretlenektől, a feltételeket a következményektől. Sokszor az is hozzájárul ehhez, hogy a feladat megfogalmazásából számukra elég nehezen olvasható ki némelyik feltétel. Ezeknek pontos elkülönítése tulajdonképpen a feladat *megértését* jelenti. Meg kell tanítani a diákokat arra, hogy *ne kezdjenek addig a megoldáson gondolkodni, amíg meg nem értették a feladatot.*

IV. Ha nem tudnak elindulni egy feladat megoldásában, mutassunk rá sok példát, hogy hogyan lehet rajta könnyíteni! Ehhez először meg kell fogalmazniuk, hogy mitől nehéz a probléma. (Pl. túl sok feltételt kell kielégíteni egyszerre). Ezt eleinte nehéz megtenniük, de 14-15 éves tanulók fél év, egy év alatt belejönnek. Örömet szerez a diákoknak, amikor napról napra tapasztalják, hogy a feladatok jelentős részén könnyíteni tudnak (pl. egy feltétel kiküszöbölésével), majd az itt alkalmazott megoldási módot az eredeti példában alkalmazhatják.

V. Más esetben az segíthet az elindulásban, ha egy ismert feladatra vezetjük vissza problémánkat. El kell érnünk, hogy a tanulóknak eszükbe jusson hasonló feladat után kutatni. Nehéz pontosan megmondani, hogy mit jelent a *hasonló feladat*, ilyen lehet az is, amely esetleg csak a feltételekben, vagy csak a következményekben mutat rokonságot. Erre ritkán gondolnak.

VI. Mit csinál a tanár, amikor diákja elakad? Nem a megoldást közli vele, hanem pl. segítő kérdéseket tesz fel. Tanítsuk meg a diákokat, hogy ezeket a segítő kérdéseket önmaguk számára meg tudják fogalmazni! Igen sok gyakorlatot kíván, amíg ehhez önállóan hozzászoknak. A jól feltett kérdés félig már a választ is tartalmazza.

X. A geometriai feladatok megoldásában nagyon sokat segítenek a jó ábrák. Könnyű rászoktatni a diákokat, hogy geometriai feladatokat ne próbáljanak fejben megoldani, hanem az ábrába mindent (a feltételek és a következmények között szereplő elemeket is) berajzolva keressenek összefüggéseket. Nehezebb elérni azt, hogy sejtéseik megerősítésére, vagy elvetésére újabb és újabb ábrákat készítsenek.

Mikor tanítsuk?

Hogyan mehet végbe mindez a tanítás során? Lényegesnek tartom, hogy az alább (I.-X.) leírtakat, vagy azok egy részét többször elmondjuk a tanulóknak. Természetesen nagy mértékben függ az osztály képességeitől, érdeklődésétől, tudásától, hogy mennyire képesek ezeket a gondolkodást tudatosan irányító lépéseket elsajátítani. Ez akkor igazán hatékony, ha az irányelveken keresztül rendszeresen előkerülnek matematika órákon. Hány éves életkorban tanítsuk ezeket és mennyi idő alatt? 11-18 éves korosztályt tanítva azt figyeltem meg, hogy 13 éves kor előtt még korai, mert ez az időszak bizonyos matematikai alapkészségek elsajátításának az ideje és mindez túl elvont számukra. A 14-15 éves kor a legalkalmasabb, ekkor már ezeket jól megértik és alkalmazni is tudják. Leggyakrabban a következő ütemezésben dolgoztam: néhány hónapon keresztül a felmerült problémák megoldása után, ahol lehet, tudatosítjuk, hogy mi vezetett eredményre (pl. az, hogy először a bizonyítandó állítást át tudtuk írni más formába). Ha egy ilyen sokszor előfordult, akkor megfogalmazzuk általánosan: (ld. VI./3.). Így kb. egy év alatt az itt leírtak (I.-X.) többsége előkerül, a tanulók a későbbiek során önállóan is képesek használni őket, általában elég hamar megszeretik, mert a gyengébb képességűek is úgy érzik, hogy nem a véletlenen múlik, hogy eszükbe jut-e egy ötlet vagy sem, a jó képességűek pedig nehezebb problémák megoldásában is elindulhatnak.

Egy kérdés még hátra van, erre azonban nem lehet általános választ adni. Hogyan dönthető el adott feladatnál, hogy melyik „pontot" vegyük segítségül? Sok feladatnál annak természete sugallja, hogy speciális esetet vegyünk (II.) vagy inkább egy ismert tétel alkalmazhatóságát vizsgáljuk (VI./2), esetleg a példában szereplő fogalmak definíciójához nyúljunk vissza (IX.). Leginkább azonban sok feladat megoldása során tanul bele a diák abba, hogy mikor melyiket válassza.

Megjegyzések

Az 1-15. feladatokat azzal a céllal mellékelem, hogy illusztráljam, hogyan használhatók egyszerű iskolai feladatokban az alább összefoglaltak. Ugyanakkor néhány érdekesebb probléma is szerepel (3., 9.,) annak bemutatására, hogy gondolkodásunkat szokatlan feladatok megoldásakor is ugyanazon elvek szerint érdemes irányítani. Az alábbiak feldolgozását javaslom pl. matematika tanárszakos hallgatók kurzusán. (Erre 1991. decemberében lehetőségem volt a *Leuveni Katolikus Egyetemen Dirk Janssens* professzor csoportjaiban. A hallgatók számára igen nagy újdonság volt. Érdekes összehasonlítani az ottani és a budapesti diákokkal szerzett tapasztalataimat). Ehhez segítségül szolgálhat a cikk végén található két táblázat. Ha egy adott sorszámú feladatban alkalmazható gondolatot akarunk megkeresni, használjuk az első oszlopot, ha pedig azt keressük, hogy egy gondolat mely feladatok megoldásában segít, akkor a második oszlop nyújt segítséget.

A továbbiakban nem az a célunk, hogy minden matematika feladat megoldására receptet adjunk. Tudatában vagyunk, hogy a középiskolás korosztály szintjén (is) számos olyan probléma létezik, amelyhez a következők egyike sem ad segítséget. Ezt a diákokban is tudatosítani kell. *Pólya György*, a nagy magyar matematikus műveiből azokat a gondolatokat emelem ki, amelyek a tanításban a leghatékonyabbnak bizonyultak. Tőle származik a matematikai problémák itt is vázolt két fő csoportba sorolása: meghatározó (számításos) és bizonyító jellegű feladatok. A megfogalmazható kérdések azonosak mindkét esetben (ld. I.,IV.,VI.,VII.): az adatok helyett *feltételeket*, az ismeretlen helyett *következményt* kell csak írni.

Végül köszönetet mondok *Pósa Lajos* kollégámnak, aki a 3., 4., 8., 9., 10. feladatokkal segítette munkámat.

I. *Elindulás*
Mit tudunk? (mi adott?) Mik a feltételek? Mit keresünk? Mi a következmény?
II. *Vizsgáljunk speciális eseteket*
Először konkrét számpéldákon ellenőrizzük, vagy bizonyítsuk az állítás helyességét.
Vegyünk speciális eseteket szisztematikusan vagy véletlenszerűen.
III. *Általánosítsunk*
Mely adatokat érdemes paraméterekkel helyettesíteni?
Milyen ismert összefüggéseket ismerünk ezen paraméterek között?
A speciális esetek vizsgálata után: hogyan lehet ugyanezt általánosan megcsinálni?
IV. *Könnyítsünk a problémán*
Hagyjunk figyelmen kívül bizonyos adatokat, bizonyos feltételeket.
Oldjuk meg először a feladatokat így, és csak utána figyelembe véve az elhagyott adatokat, az elhagyott feltételeket.
Helyettesítsük a feladatban szereplő számokat kisebbekkel.
V. *Keressünk hasonló, már megoldott problémát*
Próbáljuk meg alkalmazni azokat az ötleteket, módszereket, amelyek ott sikerrel jártak.
Tegyük fel a kérdést: hogyan szoktunk hasonló jellegű problémát megoldani?
miben hasonlók?
az adatokban?
a feltételekben?
az ismeretlenben?
a következményben?
VI. *Tegyük fel a következő kérdéseket:*
1. a/ Mit volna elég kiszámolni, meghatározni? Mit volna elég bebizonyítani?
Szerkesztési feladatokban: Mit volna elég megszerkeszteni?
b/ Milyen adatok ismeretében tudnánk az ismeretlent könnyebben kiszámolni?
Milyen feltételekből tudnánk a bizonyítandó állításra könnyebben következtetni?
Ha az állítás $A_1\ A_2\ A_3 \Rightarrow B$ alakú, keressünk olyan C_1, C_2, C_3-at, hogy $C_1\ C_2\ C_3 \Rightarrow B$
2. Ismerünk-e olyan tételt, amelyben ugyanaz a kiindulás, vagy a kiszámítandó mennyiség, mint az adott problémában?
Ismerünk-e olyan tételt, amelyben a feltételek, vagy a következmény ugyanaz, mint az adott feladatban?
3. Át tudjuk-e írni a keresett mennyiséget más formában? Hogyan?
Át tudjuk-e írni a következményt más formában? Hogyan?
4. Mit kezdhetnénk az egyes adatokkal külön-külön?
Mit kezdhetnénk az egyes feltételekkel külön-külön?
5. Mielőtt a tervünket végrehajtanánk:
Kihasználunk-e minden ismert dolgot? Vagy ez nem szükséges? Van köztük felesleges?

Kihasználunk-e minden feltételt? Vagy nem szükséges? Van közöttük felesleges?

6. Olvassuk el a szöveget újra figyelmesen és térjünk vissza az I. pontban feltett kérdésekre.

VII. *Vegyük a problémát megoldottnak*

Célszerű időnként az eredmény, illetve a következmény felől megközelíteni a problémát.

Geometriai feladatokban: rajzoljuk be az ábrába a keresett alakzatokat is (pontot, szakaszt, egyenest stb.)

VIII. *Fogalmazzunk meg az eredményre vonatkozó sejtéseket*

Próbáljuk meg kitalálni az eredményt, ha lehet.

Fogalmazzuk meg a megoldásra vonatkozó feltételezésienket véletlenszerűen vagy szisztematikusan, utána ellenőrizzük őket.

IX. *Vegyük elő a fogalmak definícióját,*

amelyek a feladatban szerepelnek.

Ezek a definíciók néha olyan gondolatokat tartalmaznak, amelyek segítenek az elindulásban.

X. *A jó ábra fontossága*

A jó ábra nem csak geometriai feladatokban hasznos. Ha megakadunk a gondolkodásban (különösen geometriai problémákban), akkor: Rajzoljunk új ábrát, más helyzetben, más arányokkal esetleg egy kicsit eltorzítva, hogy sejtéseinket megerősíthessük, vagy elvethessük.

Rajzoljunk új ábrát, mert ha egyre már túl sok mindent rajzoltunk, nehéz rajta felfedezni bármit is.

Rajzoljunk elég nagy ábrákat, mert ezeken könnyebb észrevenni összefüggéseket.

Egyszerű feladatok

1. Igaz-e, hogy minden társaságban található két személy, akiknek ugyanannyi ismerőse van a jelenlevők között? (Az ismerettségeket kölcsönösnek feltételezzük.)

2. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, amelyekre igaz, hogy egy háromszög felbontható n darab, az eredetihez hasonló háromszögre.

3. Egy lapon a következő 101 állítás olvasható:

Egyszer egy az egy.

Ezen a lapon legfeljebb egy igaz állítás van.

Ezen a lapon legfeljebb két igaz állítás van.

...

...

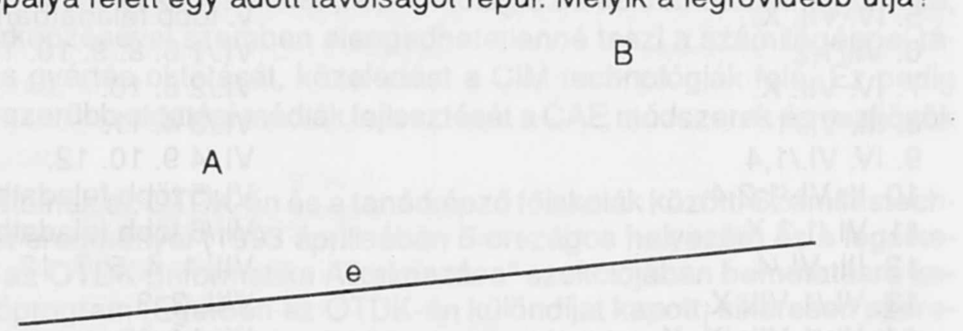
Ezen a lapon legfeljebb 99 igaz állítás van.

Ezen a lapon legfeljebb 100 igaz állítás van.

Hány igaz állítás található ezen a lapon?

4. Négyzethálós lapon rajzoljunk egy olyan négyzetet, amelynek a területe 80. (Vegyük a négyzet oldalát egységnek.)

5. Egy repülőgépnek az ábra szerinti A városból a B-be kell mennie úgy, hogy közben az e (egyenes) autópálya felett egy adott távolságot repül. Melyik a legrövidebb útja?



6. Határozzuk meg x és y értékét úgy, hogy
a) $\overline{76x3123y}$ osztható legyen 45-tel
b) $\overline{x679y}$ 72-vel
c) $\overline{5x27x6}$ 12-vel.
(A számok fölötti vonal a helyiértékes írásmódra utal)

7. Szerkesszünk szabályos háromszöget, amelynek egyik csúcsa egy adott egyenesen, másik egy adott körön, harmadik egy adott pontban van.

8. Melyik nagyobb a két tört közül?

$$\frac{10^{100}+1}{10^{101}+1} \quad \text{vagy} \quad \frac{10^{101}+1}{10^{102}+1}$$

9. Az illetékes szervek bejelentése alapján 1996. január elsején hajnalban az újév tiszteletére a Belvárosban ki fognak tenni egy óriási táblát, amelyre felírják a természetes számokat 1-től 1996-ig. Bárki odamehet a táblához, letörölhet két számot, de ezután föl kell írnia a letörölt számok különbségét. Ha a végén már majd csak egy szám marad, lehet-e az, hogy ez a 11?

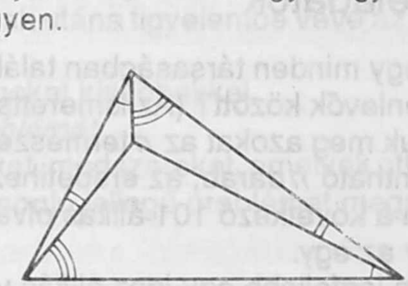
10. Van-e olyan n természetes szám, amelyre n jegyeinek összege 16 és $2n$ jegyeinek összege 17?

11. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldalán tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk a háromszögbe a lehető legkisebb kerületű háromszöget (minden csúcsa más-más oldalon van) úgy, hogy az egyik csúcsa a kitűzött pont legyen.

12. Pista és Jancsi együtt indultak el az iskolából a közeli turistaházhoz. Azonos útvonalon mentek és egyszerre érkeztek meg. Pista kétszer annyi ideig gyalogolt, mint Jancsi pihent, Jancsi pedig háromszor annyi ideig ment, mint amennyit Pista pihent. Melyikük haladt gyorsabban, amikor mentek?

13. Adott a síkon két kör és egy szakasz. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik körön legyen.

14. Az ábrán az egyformán jelölt szögek egyenlők. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe berajzolt szakaszok a magasságvonalak egyenesein vannak.



15. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...) bármely két egymás utáni eleme egymáshoz relatív prím.

Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy a fentiek közül mit, melyik feladatban érdemes alkalmazni.

1. II. VII. X.	I. mindenhol
2. II. III. VIII. X.	II. 1. 2. 10. 15.
3. IV. VIII.	III. 2. 8. 12. 15.
4. VI./3 VII. X.	IV. 3. 5. 7. 9.
5. IV. VII. X.	V. több feladatban
6. VI./1,2	VI./1 6. 8. 9. 10. 11. 13.
7. IV. VII. X.	VI./2 6. 10.
8. III. VI./1	VI./3 4. 11.
9. IV. VI./1,4	VI./4 9. 10. 12.
10. II. VI./1,2,4	VI./5 több feladatban
11. VI./1,3 X.	VI./6 több feladatban
12. III. VI./4	VII. 1. 4. 5. 7. 13.
13. VI./1 VII. X.	VIII. 2. 3.
14. VI./1 VII. IX. X.	IX. 14. 15.
15. II. III. IX.	X. 1. 2. 4. 5. 7. 11. 13. 14.