A számfogalom bővítéséről

SZENDREI JÁNOS

A jelen cikkben szakmai oldalról segítséget kívánunk nyújtani ahhoz, hogy a természetes számok közötti műveletek tulajdonságainak felhasználásával hogyan lehet már a természetes számok között azokat az azonosságokat kiemelni, amelyek – a permanencia-elvet szem előtt tartva – modellként szolgálnak a nemnegatív törtek, ill. a racionális számok közötti műveletek értelmezéséhez.

Természetes számok

A természetes szám fogalmával, a velük kapcsolatos műveletekkel és ezek tulajdonságaival az alsó tagozatban ismerkednek meg a tanulók. A természetes számokkal való megismerkedés módját, módszereit itt nem kívánjuk tárgyalni. Abból indulunk ki, hogy ismertnek tételezzük fel az alábbiakat:

Természetes számok: 0, 1, 2, 3, ...

A természetes számok halmazát **N** jelöli. (A latin naturalis = természetes szó kezdőbetűje.) A természetes számok között megismert relációk és (részben korlátozott) műveletek:

nagyobb vagy egyenlő: $m \geq n$;

többszöröse (osztója): m többszöröse n-nek (n osztója m-nek), ha van olyan t természetes szám, amelyre $m=nt$;

az összeadás: $m+n$;

a kivonás: $m-n$ (ha $m \geq n$);

a szorzás: $m \cdot n$;

az osztás: $m : n$ (ha $n \neq 0$, és m többszöröse n-nek)

Érvényesek a következő azonosságok (ahol feltesszük, hogy a szereplő különbségek, hányadosok természetes számok):

(1) $m+n=n+m$,	(1') $mn=nm$,	(kommutativitás= felcserélhetőség)
(2) $(m+n)+k=m+(n+k)$,	(2') $(mn)k=m(nk)$,	(asszociativitás=társíthatóság)

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & (m\pm n)k=mk\pm nk, \\ (3') & (m\pm n):k=(m:k)\pm(n:k) \end{array}\right\}$$

(disztributivitás= széttagolhatóság, azaz a szorzás (osztás) az összeadásra, kivonásra nézve széttagolható)

(4) $m-n=(m+k)-(n+k)$,	(4') $m:n=mk:nk$,
(5) $m-n=(m-k)-(n-k)$,	(5') $m:n=(m:k):(n:k)$,
(6) $(m+n)-k=(m-k)+n$,	(6') $(mn):k=(m:k)n$,

(7) $(m+n)-k=m+(n-k)$, (7') $(mn):k=m(n:k)$,
(8) $(m-n)-k=m-(n+k)$, (8') $(m:n):k=m:(nk)$,
(9) $m-(n-k)=(m-n)+k$, (9') $n:(n:k)=(m:n)k$.

Ezeket az azonosságokat gyakran szavakban is megfogalmazzuk. A (4), (5) ill. (4'), (5') így fogalmazható:

A különbség értéke nem változik, ha a kisebbítendőhöz és a kivonandóhoz ugyanazt a (természetes) számot hozzáadjuk vagy kivonjuk.

A hányados értéke nem változik, ha az osztandót és az osztót ugyanazzal a (természetes) számmal szorozzuk vagy osztjuk.

Ezek másképpen azt jelentik, hogy egy természetes számot többféleképpen írhatunk fel akár különbségként, akár hányadosként. Például:

$6=6-0=10-4=13-7=7-1=19-13=\ldots$
$6=6:1=12:2=30:5=60:10=90:15=\ldots$

A (6), (7), ill. (6'), (7') megfogalmazása:

Összegből úgy vonunk ki egy számot, hogy az összeg egyik tagjából vonjuk ki a számot és a különbséghez hozzáadjuk az összeg másik tagját.

Szorzatot úgy osztunk egy számmal, hogy a szorzat egyik tényezőjét osztjuk el a számmal és a hányadost szorozzuk a szorzat másik tényezőjével.

A (8), (9), ill. a (8'), (9') azonosságot is megfogalmazhatjuk, bár ez kissé körülményesebb, s éppen ezért nem is gyakran használjuk.

Az azonosságok oldalainak felcserélésével kapott azonosságok is nagyon fontosak. Elegendő például a (3) alatti disztributivitásra gondolni, ami az oldalak felcserélésével az ún. *kiemelést* eredményezi.

Az eddigi azonosságok között nem szerepel különbségek összege, szorzata, és hányadosnak összege, szorzata. Kérdés, hogy a felsorolt azonosságokból kaphatunk-e ezekre választ. Nézzük először két különbség összegét! (Az = jel fölött jelezzük, hogy mely azonosságot alkalmazzuk.)

(10) $(m-n)+(k-l)\overset{(6)}{=}(m+(k-l))-n\overset{(7)}{=}((m+k)-l)-n\overset{(8)}{=}(m+k)-(l+n)$,

azaz az összeadás kommutativitását felhasználva

$(m-n)+(k-l)=(m+k)-(n+l)$.

Két különbséget úgy adhatunk össze, hogy a kisebbítendők összegéből kivonjuk a kivonandók összegét.

Két különbség szorzatát a következőképpen kaphatjuk:

$(m-n)(k-l)\overset{(3)}{=}m(k-l)-n(k-l)\overset{(3)}{=}(mk-ml)-(nk-nl)\overset{(9)}{=}$

$=((mk-ml)-nk)+nl\overset{(8)}{=}(mk-(ml+nk))+nl\overset{(6)}{=}(mk+nl)-(ml+nk)$.

Röviden:

(11) $(m-n)(k-l)=(mk+nl)-(ml+nk)$.

Szavakban megfogalmazva (kissé bonyolult): *Két különbség szorzatát megkaphatjuk úgy is, ha a kisebbítendők szorzatának és a kivonandók szorzatának összegéből kivon-*

juk az első kisebbítendő és a második kivonandó szorzatának és a második kisebbítendő és az első kivonandó szorzatának összegét.

Hasonlóképpen vizsgáljuk a hányadosok összegére, ill. szorzatára vonatkozó azonosságokat is. A (3') alatti azonosság oldalait felcserélve kapjuk az

(12) $(m:n)+(k:n)=(m+k):n$

azonosságot. Ez szavakban a következőt jelenti:

Két, közös osztójú hányados összege egyenlő az osztandók összegéből és a közös osztóból képezett hányadossal.

Hogyan alakul két hányados összege, ha a hányadosban nem közös az osztó? Most felhasználhatjuk a (4') azonosságot:

$$(m:n)+(k:l)\overset{(4)}{=}(ml:nl)+(nk:nl)\overset{(3)}{=}(ml+nk):nl,$$

azaz

(13) $(m:n)+(k:l)=(ml+nk):nl.$

Két tetszőleges hányados összegét úgy is megkaphatjuk, hogy a hányadosokat közös osztójú hányadosokká alakítjuk, majd az osztandók összegét osztjuk a közös osztóval.

Végül két hányados szorzatát is fel tudjuk írni egyetlen hányadosként a következő módon:

$(m:n)(k:l)=(m(k:l)):n=(mk:l):n=mk:nl$, azaz

(14) $(m:n)(k:l)=mk:nl$

Ez megfogalmazva a következőt jelenti:

Két hányados szorzata egyenlő az osztandók szorzatából és az osztók szorzatából alkotott hányadossal.

Ismételjük, mindezek a természetes számok különbségére és hányadosára vonatkozó azonosságok igazak, feltéve, hogy a különbség ill. a hányados maga is természetes szám.

A számfogalom bővítése úgy merül fel, hogy a természetes számok halmazában a kivonás, ill. az osztás csak bizonyos esetekben végezhető el. Mégpedig az $m-n$ különbség akkor képezhető, ha $m \geq n$, és az $m:n$ hányadosnak is csak akkor van értelme, ha ez természetes szám. Algebrai szempontból a természetes számfogalom bővítésére azért gondolunk, hogy a bővebb számhalmazban a kivonást ill. az osztást (természetesen a 0-val való osztást kivéve) korlátlanul elvégezhessük.

Ha a kivonás elvégezhetőségét akarjuk elérni, akkor a természetes számok különbségére rótt kikötést, az $m \geq n$ feltételt ejtjük el, azaz most már a természetes számokból álló valamennyi különbséget tekintjük, megtartva mindazokat az azonosságokat, amelyek a természetes számok halmazában érvényesek voltak. (Ez a permanencia-elv.)

Egész számok

Egész számon két természetes szám különbségeként felírható számot értünk a (4), (5) azonosság figyelembevételével, azaz két különbség ugyanazt az egész számot jelenti, ha egyik a másiktól abban különbözik, hogy a kisebbítendőhöz és a kivonandóhoz ugyanazt a természetes számot hozzáadjuk vagy kivonjuk, azaz,

(4*) $m-n=(m+k)-(n+k)$,
(5*) $m-n=(m-k)-(n-k)$,

Ezek szerint egy egész számot többféleképpen írhatunk fel két természetes szám különbségeként. Példa:

$4-10=5-11=2-8=0-6=10-16=\ldots$,

Az egész számok közötti összeadás és szorzás a természetes számok különbségei összegének, szorzatának (10), (11) alatti azonossága – mint „modellje" – alapján *a következőképpen értelmezhető:*

(10*) $(m-n)+(k-l)=(m+k)-(n+l)$,
(11*) $(m-n)(k-l)=(mk+nl)-(ml+nk)$.

Igazolható, hogy az egész számok között e műveletekre érvényes a kommutativitás, asszociativitás és a disztributivitás.

A (4), ill. az (5) azonosságot is felhasználva mindig elérhető, hogy két természetes szám különbsége olyan különbségként írható fel, amelyben a kivonandó 0 vagy a kisebbítendő 0. Legyen ugyanis $m \geq n$, akkor $m=n+t$, ahol $t \in \mathbf{N}$, s így $m-n=(n+t)-n=(n+t-n)-(n-n)=t-0$.

Ha pedig $m<n$, azaz van olyan $s \in \mathbf{N}$, amelyre $m+s=n$, akkor $m-n=m-(m+s)=(m-m)-(m+s-m)=0-s$.

Tehát bármely két természetes szám különbsége, azaz bármely egész szám $t-0$ vagy $0-s$ alakban írható fel. A $t-0$ különbség azonban természetes szám, mégpedig $t-0=t$.

(10*) alapján könnyen látható, hogy, $(0-s)+(s-0)=(0+s)-(s+0)=s-s=0$,

azaz a $0-s$ különbséggel jellemzett egész szám az s természetes szám *ellentettje* (algebrai nyelven additív inverze). A $0-s$ különbséggel adott egész számot a későbbiekben egyszeren $-s$-sel jelöljük, azaz $0-s=-s$.

Könnyen belátható, hogy $-s$ ellentettje pedig s, mivel

$-(-s)=0-(-s)=(s-s)-(0-s)=(s-0)-(s-s)=s-0=s$.

A 0 ellentettje nyilvánvalóan önmaga.

Az ellentett fogalmának bevezetésével az $m-n$ különbséget összegként is felírhatjuk mivel

$m-n=(m+0)-(0+n)=(m-0)+(0-n)=m+(-n)$.

Mindezeket figyelembe véve az egész számok a következők:

$$\underbrace{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,}_{\text{természetes számok ellentettjei}}\ \underbrace{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots}_{\text{természetes számok}}$$

Az egész számok halmazát **Z** jelöli. (A német Zahl=szám kezdőbetűje alapján.) Ezek után az egész számok között (10*)-ban és (11*)-ban általánosan értelmezett összeadást és szorzást elegendő a természetes számokra és ellentettjeikre megadni. A következő eseteket kell megkülönböztetnünk:

a) Mindkét tag (tényező) természetes szám. Ebben az esetben nyilvánvalóan a természetes számok összegét illetve szorzatát kapjuk.

b) Egyik tag (tényező) természetes szám, a másik természetes számnak az ellentettje:

$$t+(-s)=(t+0)+(0-s)=(t+0)-(0+s)=t-s=\begin{cases} t-s \in \mathbf{N}, \text{ ha } t \geq s, \\ -(s-t), \text{ ha } t<s \end{cases}$$

$$t(-s)=(t+0)(0-s)=(t \cdot 0+0 \cdot s)-(t \cdot s+0 \cdot 0)=0-ts=-ts.$$

c) Mindkét tag (tényező) természetes szám ellentettje:

$$(-t)+(-s)=(0-t)+(0-s)=(0+0)-(t+s)=-(t+s),$$
$$(-t)(-s)=(0-t)(0-s)=(00)+(ts)-(0 \cdot s+t \cdot 0)=ts-0=ts.$$

Ha ezeket az eredményeket szavakba foglaljuk, akkor a tankönyvekből ismert szövegeket kapjuk. Például a legutolsók így fogalmazhatók meg:

Két természetes szám ellentettjének összege egyenlő a természetes számok összegének ellentettjével.

Két természetes szám ellentettjének szorzata egyenlő a két természetes szám szorzatával.

Racionális számok

Ha a természetes számok ismerete után az osztás műveletét kívánjuk „korlátozás nélkül" elvégezni, akkor az m:n hányados fogalmát kell értelmeznünk bármely m és n($\neq$0) természetes számra. Ekkor alakítjuk ki a természetes számokból képezett *racionális számok* fogalmát. (Racionális itt azt jelenti, hogy arányként (hányadosként) felírható). A természetes számokból alkotott racionális szám fogalmának kialakítása tehát azt jelenti, hogy minden m és n($\neq$0) természetes számra értelmezzük az m:n hányadost, amit másként $\frac{m}{n}$-nel jelölünk. Most m-et (az osztandót) *számlálónak*, n-et (az osztót) pedig *nevezőnek* hívjuk. (Racionális számon most egyelőre csak a természetes számokból képezett racionális számot értjük.) A racionális szám fogalmának kialakítása során a természetes számoknál megismert (4'), (5') azonosságot is általánosíthatjuk, s megállapodunk abban, hogy minden k $\neq$0 természetes számra teljesül:

$$(4^*) \quad \frac{m}{n} = \frac{mk}{nk} \qquad \text{(Ezt bővítésnek nevezzük.)}$$

Továbbá, ha k osztója m-nek és n-nek (azaz maradék nélkül megvan m-ben és n-ben), akkor

$$(5^*) \quad \frac{m}{n} = \frac{m:n}{n:k} \qquad \text{(Ez az egyszerűsítés.)}$$

Megfogalmazva: *A racionális szám értéke nem változik, ha a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a (természetes) számmal szorozzuk (osztjuk).*

Ezek alapján egy racionális számot többféleképpen írhatunk fel. Példa:

$$\frac{6}{9}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}=\frac{30}{45}=\frac{36}{54}=\ldots$$

Gyakran célszerű a racionális számnak a tovább már nem egyszersíthető alakját használni.

A racionális számok közötti műveletek modelljének most a természetes számok közötti osztásra vonatkozó (12), (13), (14) azonosságokat tekintjük. Ezek alapján a racionális számok összeadását és szorzását a következőképpen értelmezzük:

$$(12^*)\ \frac{m}{n}+\frac{k}{n}=\frac{m+k}{n}$$

$$(13^*)\ \frac{m}{n}+\frac{k}{l}=\frac{ml}{nl}+\frac{nk}{nl}=\frac{ml+mk}{nl}$$

$$(14^*)\ \frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}=\frac{mk}{nl}$$

Ezeknek a definícióknak a megfogalmazásai:

Két közös nevezőjű racionális szám összege egyenlő a számlálók összegéből és a közös nevezőből képezett racionális számmal.

Két tetszőleges racionális szám összegét úgy kapjuk meg, hogy a racionális számokat közös nevezőjű racionális számokká alakítjuk, majd a számlálók összegét osztjuk a közös nevezővel.

Két racionális szám szorzata egyenlő a számlálók szorzatából és a nevezők szorzatából alkotott hányadossal (racionális számmal).

Ezek után – felhasználva a (4*) ill. (5*) azonosságot – bizonyíthatjuk, hogy a (12*), (13*), (14*) szerint definiált összeadás és szorzás kommutatív, asszociatív, a szorzás az összeadásra nézve disztributív, van zéruselem (mégpedig $\frac{0}{n}=0$, ahol $n\neq0$). Az is nyilvánvaló, hogy az

$$\frac{mn}{n}=\frac{m}{1}=m \qquad (n\neq 0)$$

alakú racionális számok a természetes számok. Továbbá az

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=\frac{mn}{mn}=1 \qquad (m\neq 0,\ n\neq 0)$$

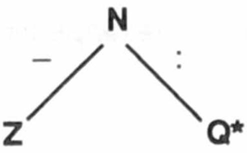
alapján $\frac{n}{m}$ az $\frac{m}{n}$ racionális szám reciproka (inverze). Ez utóbbi más szóval azt jelenti, hogy 0-tól különböző minden racionális számnak van reciproka. Az eddigiek alapján az is látható, hogy minden racionális szám így is felírható:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{m}{1}=\frac{1}{n}\cdot m$$

Ez az azonosság szolgál alapul az iskolai anyagban a tört kétféle értelmezésének.

A természetes számok hányadosaiból alkotott racionális számok halmazát jelöljük **Q***-gal. (**Q** a latin quotiens=hányados kezdőbetűje.)

Az eddigiek során leírt kétféle eljárást így szemléltethetjük:

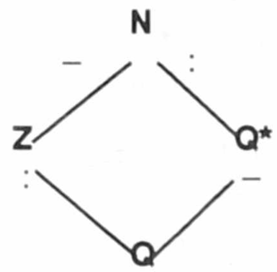


Az egész számok **Z** halmazában tehát az összeadás, ennek fordított (inverz) művelete a kivonás és a szorzás végezhető el korlátlanul, de az osztás csak bizonyos esetekben. Ha most fejezet elején leírtakhoz hasonlóan bármely m, n ($\neq 0$) egész szám hányadosát tekintjük, és ezekre terjesztjük ki a **Z**-ben már értelmezett első három alapműveletet, akkor itt az osztás is mindig elvégezhető, kivéve természetesen a 0-val való osztást. Ez a racionális számok **Q** halmaza.

A **Q***-ban viszont a kivonás végezhető el korlátozottan, pontosan akkor, ha a kisebbítendő nagyobb vagy egyenlő a kivonandónál. Ebben az esetben az egész számoknál leírtakhoz hasonlóan eljárva, azaz **Q** bármely két elemére értelmezve azok különbségét, szintén olyan számhalmazhoz jutunk, amelyben mind a négy alapművelet (kivéve a 0-val való osztást) elvégezhető, és az ismert műveleti azonosságok teljesülnek. Bizonyítható, hogy ez a halmaz is az összes racionális számok **Q** halmaza.

Az összes racionális számok **Q** halmazában minden elemnek van ellentettje és minden nem zérus számnak van reciproka.

A fenti ábrát kiegészítve az utóbb vázolt két eljárással a következőt kapjuk:



Bebizonyítható hogy **Q**-nál szűkebb halmazban mind a négy alapművelet nem végezhető el. Legyen ugyanis **Q'** a **Q**-nál szűkebb halmaz, azaz **Q'** $\subset$ **Q** és tegyük fel, hogy **Q'**-ben is elvégezhető mind a négy alapművelet. Az osztás elvégezhetősége miatt **Q'**-ben van 0-tól különböző r elem. Az $\frac{r}{r} = 1 \in$ **Q.** Az összeadás elvégezhetősége miatt:

$1+1=2,\ 2+1=3,\ 3+1=4, \ldots$

alapján **N** $\subseteq$ **Q'**. Ebből a kivonás elvégezhetősége miatt **Z** $\subseteq$ **Q'** következik. Majd ebből ismételten az osztás elvégezhetősége miatt következik **Q** $\subseteq$ **Q'**. Ez pedig ellentmond a kiindulási feltételeknek. Tehát a számok világában az összes racionális számok halmaza a legszűkebb olyan halmaz, amelyben a négy alapművelet (a 0-val való osztást kivéve) az ismert tulajdonságokkal elvégezhető.

A fentiekben megfigyelhető, hogy kerültük a „pozitív", „negatív" jelzőket, csupán „ellentett"-ről beszéltünk. Ennek oka az, hogy a pozitív, negatív fogalom a műveleti tulajdonságokon kívül mást is takar. Nevezetesen azt, hogy a 0-tól különböző egész számok halmazát olyan két (idegen) részhalmazra lehet bontani, amelyek közül az egyikben az összeadás és a szorzás mindig elvégezhető. Ez utóbbiba tartozó számokat nevezik pozitív egészeknek, a másikba tartozókat pedig negatívoknak. Bizonyítható, hogy az egész számok halmazát csak egyféleképpen, az ismert módon lehet így két részhalmazra bontani. Hasonló igaz **Q**-ban is. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a számegyenes két fele – a számok szempontjából – nem azonos szerepet tölt be.