Ha a rendelkezésre álló gépek száma eléri legalább a csoport létszámának negyedét-harmadát, akkor sokkal több felhasználási terület kínálkozik. Érdemes pl. évkezdetkor számítógépes szintfelmérést tartani, és az egyes átismétlendő, gyakorlandó régi anyagrészeket számítógépen (is) gyakoroltatni. Az egyes tanulók aktuális tudásszintjét és haladásának dokumentumait szintén számítógépen kifizetődő tárolni. Néhány fős csoportokat képezhetünk, közülük egyesek a komputeren dolgoznak, a többiekkel intenzívebben foglalkozhatunk. Minél inkább ambícionáljuk az egyes diákok tanulását, fejlődését követni és irányítani, annál inkább rászorulunk a számítógép segítségére, amely erre a célra a legrugalmasabban felhasználható eszköz.

Számítógépek az idegennyelv-oktatásban (R.A.Morrey: Computers in the Second Language Classroom, Proceedings of the Twelfth Educational Computing Organization of Ontario Conference and the Eighth International Conference on Technology and Education, Toronto, May 1991, 4-6. p.)

Gyakorlati útmutató idegen nyelvek számítógéppel támogatott oktatásához (R.A.Morrey: Practical Guidelines for Using Computers in the Second Language Classroom, Proceedings of the Twelfth Educational Computing Organization of Ontario Conference and the Eighth International Conference on Technology and Education, Toronto, May 1991, 535-537. p.)

MÁRTONFI GYÖRGY

Hogyan tanítsuk...

...a szöveges feladatokat?

A szöveges feladatoknak nagy szerepük van a tanulók problémamegoldó képességének fejlesztésében, gyakorlati életre való felkészítésében, személyiségjegyeik kialakításában. Lehetőséget adnak sokféle matematikai fogalom alakítására és gyakorlati alkalmazására (pl. reláció, nyitott mondat), a számolási készség és a bizonyítási készség fejlesztésére stb. Ezért a szöveges feladatok megoldatása nagyon fontos és hatékony eszköze az oktató, nevelő munkának. El kell érni, hogy a tanulók képesek legyenek a feladatok *teljesen önálló* megoldására, természetesen differenciáltan, képességeiknek megfelelő szinten.

E céltól az alsó tagozatos gyerekek nagy része eléggé messze van. Ennek az elfogadhatatlan állapotnak olyan sok oka van, hogy ezek ismertetése külön tanulmányt igényelne. Most a hiányosságok, hibák felsorolása helyett inkább azt a módszert, illetve azokat a módszertani fogásokat szeretném ismertetni, amelyek alkalmazása esetén jobb eredményt remélhetünk.

A szöveges feladatok megoldásának a módszertan által meghatározott, logikailag egymás után következő lépései (fázisai) a következők:

A feladat megértése.

Az elemzés.

A megoldási terv készítése, felírása számkifejezéssel, vagy nyitott mondattal.

A megoldási terv végrehajtása (megoldás).

Az ellenőrzés.

Válaszadás.

Nézzük ezután, hogy milyen tartalommal kell ezeket a fázisokat megtölteni, egy konkrét példa esetén.

Feladat: Egy öltöny 2800 Ft-ba kerül. A nadrág ára a kabát árának a 3 negyed része.

Mennyi a kabát ára?

Mennyibe kerül a nadrág?

Első fázis: a feladat megértése

A megértés a diák feladata, a tanítóé pedig a megértés ellenőrzése. Ennek érdekében a következő kérdéseket kell feltennie:

- Milyen adatokat ismerünk?
- Milyen adatokat nem ismerünk?
- Milyen összefüggéseket ismerünk?
- Mit kell kiszámítani?

(A későbbiek során a gyerekeknek önállóan kell gondolniuk ezekre a kérdésekre.)
A tanító szoktassa rá a tanulókat arra is, hogy az adatokat táblázatszerűen írják ki, és rögzítsék röviden az összefüggéseket. (Ezt nem lehet azzal pótolni, hogy a szövegben aláhúzásokat alkalmazunk.)

A megoldás előtt praktikus megállapodni abban, hogyan jelöljék az egyes ismeretleneket (változókat). Az egységes jelölés alapján a gyerekek könnyebben megértik egymás különböző megoldásait, és könnyebb lesz az ellenőrzés is.

Az adatokat és a közöttük fennálló összefüggéseket így emelhetik ki a szövegből:

Öltöny: 2800 Ft

Nadrág: □ Ft, ez 3 negyede △ Ft-nak.

Kabát: △ Ft.

Így is célszerű feliratni az összefüggést:

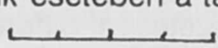
$$\square \text{ Ft} \xrightarrow[\text{Ez 3 negyede ennek}]{} \triangle \text{ Ft}$$

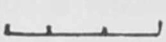
Második fázis: elemzés

Az elemzést nagymértékben megkönnyítik a rajzok. Ezek nélkül a tanulók többsége nem képes a kissé nehezebb problémák megoldását megtalálni. A nehezebb feladatokat a jó tanulók is csak rajz segítségével tudják megoldani. Meg kell tehát tanítani a tanulókat megfelelő rajzok készítésére.

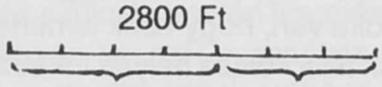
A színes rudak előzetes alkalmazása alapján a gyerekek könnyen megértik a számok, mennyiségek szakaszokkal való ábrázolásának az elvét. Minden adatot és minden összefüggést ábrázolni kell! Célszerű különböző színek alkalmazása is.

Példánk esetében a tanulóktól a következő ábrázolást várhatjuk el.

Kabát:  Ft

Nadrág:  Ft

Öltöny: 2800 Ft



△ Ft □ Ft

Az osztáspontoknak döntő szerepe van. Az ilyen rajzok alapján sokféle megoldási tervet találhatnak.

Harmadik fázis: a megoldási terv elkészítése

A megoldás logikai menetét önállóan kell a gyerekeknek megtalálniuk. A tanító csak az igazán rászorulókat segítse, őket is csak a szükséges mértékben, mert különben nem fognak fejlődni.

Biztassa arra a tanulókat, hogy többféle megoldást is keressenek! Tapasztalatok alapján az a véleményem, hogy egy szöveges feladat sokféle megoldatásával jobban fejleszthető a problémamegoldó gondolkodás, mint sok feladat egyféle, sokszor ötlettelen, felületes megoldásával. Akkor van szükség igazán ötletekre, amikor ugyanazt a problémát másképpen is meg akarjuk oldani.

Választott feladatunk esetén is sokféle helyes megoldási tev készíthető, például a következők:

$$(1)\quad \begin{cases} \triangle + \square = 2800 \\ \square = (\triangle / 4)\cdot 3 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \triangle + \square = 2800 \\ \triangle = (\square / 3)\cdot 4 \end{cases}$$

$$(3)\quad \triangle + (\triangle / 4)\cdot 3 = 2800$$

$$(4)\quad (\square / 3)\ 4 + \square = 2800$$

$$(5)\quad \triangle = (2800 / 7)\cdot 4$$

$$(6)\quad \square = (2800 / 7)\cdot 3$$

Ahány helyes vagy helytelen megoldási tervet találnak a tanulók, mind kerüljön a táblára és mindegyiket indokolják, értelmezzék és próbálják eldönteni, hogy helyes-e! A végső döntést az ellenőrzés alapján lehet, illetve kell meghozni.

Negyedik fázis: a megoldás

Ez abból áll, hogy a tervként felírt nyitott mondatot megoldjuk, illetve a számkifejezés értékét kiszámítjuk. Az ismeretlenek meghatározása a legegyszerűbb az (5)-ös vagy a (6)-os megoldási terv alapján, mert ezek esetén egy számkifejezés értéket kell csak kiszámítani. A többi megoldási terv egy, illetve két nyitott mondatból áll. A nyitott mondatokat a tanterv szerint próbálgatással kell megoldaniuk a gyerekeknek.

Az (1)-es és a (2)-es tervben két ismeretlen is szerepel, ezeket próbálgatással hosszadalmas lenne meghatározni. Ezért arra kell ösztönözni a tanulókat, hogy olyan nyitott mondatot írjanak fel megoldási tervként, amelyben csak egy ismeretlen szerepel. Ilyen pl. a (3)-as számú terv:

$$\triangle + (\triangle /4)\cdot 3=2800$$

Ebből a kabát ára ( ) próbálgatással a következőképpen határozható meg. Először a becsléssel kapott értékkel próbálkozzanak a gyerekek

$\triangle > 2800/2$

$\triangle$ kb. 1500 Ft

$\underbrace{1500+(1500/4)\cdot 3}_{2625}=2800$ (hamis)

A tanulóknak rá kell jönniük arra, hogy nagyobb számmal érdemes próbálkozni!

$\triangle$ kb. 1700 Ft

$\underbrace{1700 + (1700/4)\cdot 3}_{2975}=2800$ (hamis)

Ezután kisebb számot célszerű kipróbálni:

$\triangle$ kb. 1600 Ft

$\underbrace{1600+(1600/4)\cdot 3}_{2800}=2800$ (igaz)

Tehát $\triangle$ = 1600 Ft és

$\square$ = 2800 Ft–1600 Ft = 1200 Ft

Megjegyzés: Nagyon helytelen, ha a tanító a próbálgatás helyett betanítja az egyenletek gépies megoldását. Egyrészt azért, mert a próbálgatás a számolási készséget fejleszti, másrészt pedig a formalizmusra előbb-utóbb ráfizet a tanuló. Ha időt akarunk nyerni, akkor néhány próbálgatás után inkább közöljük az ismeretlen számértékét.

Ötödik fázis: az ellenőrzés

Az általunk kiszámított értékek akkor és csak akkor helyesek, ha a szöveg szerint számolva velük, minden eredeti adatot megkapunk. Tehát ellenőrzéskor tekintsük ismeretleneknek az eredeti adatokat, és mindegyiket számítsuk ki!

a) Az öltöny ára 2800 Ft-e?

b) A nadrág ára a kabát árának a 3 negyed része-e?

Mennyi az öltöny ára?

1600 Ft + 1200 Ft = 2800 Ft

Hányad része a nadrág ára a kabát árának?

1200 : 1600 = 12:16 = 3:4 = 3/4

Megkaptuk az eredeti adatokat, ezért biztos, hogy jól számítottuk ki az ismeretleneket.

Hatodik fázis: válaszadás a feladat kérdéseire.

A kabát ára 1600 Ft.

A nadrág 1200 Ft-ba kerül.

Látható, hogy a szöveges feladatok megoldatásának módszertana sok időt, alaposságot igényel. A szükséges időt ne sajnálja a tanító, ne akarjon úgy időt nyerni, hogy sürgeti a tanulókat, hogy a kelleténél sokkal többet segíti őket a megoldásban. Ne egyszerűsítse le, ne nagyolja el az egyes módszertani lépéseket, mert nem lesz eredményes a munkája.

Törekedjen arra, hogy a gyerekek minél előbb és minél önállóbban oldják meg a feladatokat. Adjanak fel gyakran szöveges feladatot házi feladatként, mert otthon a tanulók több időt fordíthatnak a megoldásra. Ne felejtsék el azt sem, hogy a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére csak az összetett feladatok alkalmasak.

Végül néhány megjegyzés. Az esetek döntő többségében nyitott mondatok segítségével oldjuk meg a szöveges feladatokat, de erre sem szabad teljesen rászokni. Többször sokkal ügyesebben oldhatók meg a feladatok próbálgatással. Például: *Egy kétjegyű szám első számjegye 4-gyel nagyobb, mint a második. Ha számjegyeit felcseréljük és az úgy kapott számot az eredetihez hozzáadjuk, akkor 88-at kapunk. Melyik számról van szó?* Legfeljebb a következő számokat kell kipróbálni: 95, 84, 73, 62, 51, 40.

Szoktassuk rá a tanulókat arra, hogy az eredeti szituációt próbálják módosítgatni. Nézzük például a következő feladatot! *Egy osztály létszáma 27, a lányok 3-mal többen vannak, mint a fiúk. Mennyi a lányok, illetve a fiúk száma?* Nagyon könnyen és gyorsan megoldhatjuk a problémát, ha elképzeljük, hogy kiküldünk az osztályból három lányt, vagy behívunk az osztályba még három fiút. A feltételezett szituációk alapján a fiúk száma (27-3)/2=12, illetve a lányok száma (27+3)/2 = 15.

... az írásbeli osztást?

A kétjegyű számmal történő írásbeli osztás a legutóbbi tantervi korrekció óta szerepel az alsó tagozaton, a 4. osztályban. Ennek alapműveletnek a szokásos algoritmusa – abban az esetben, ha a kivonandó részletszorzatokat nem írjuk le – még a felső tagozatos tanuló számára is bonyolult. Ezért ezt az algoritmust szemléletes lejegyzéssel kell megértetni és bizonyos ideig gyakoroltatni. Egy olyan módszert szeretnék bemutatni, amelyet eddig hiába kerestem mind az alsó tagozatos, mind a felső tagozatos matematikai szakirodalomban. Ezen algoritmus leírásának, magyarázatának a hiánya nagyon gyakran eredményezi azt, hogy a tanítás-tanulás csak formálisan, gépiesen történik. Ez egyáltalán nem korszerű, és megengedhetetlen. Az alapműveletekkel kapcsolatos készség szintet úgy kell kialakítani, hogy a tudatosság megelőzze a gépiességet. A későbbi gyakoroltatás során is ellenőrizze a pedagógus, hogy érti-e még (illetve már) a tanuló azt, amit végez.

A kétjegyű számmal való osztás tanítását, tanulását az alábbiak szerint képzelem el: Azzal, amit nem okoz különösebb gondot a tanítás során (pl. becslés, ellenőrzés), nem kívánok foglalkozni, csak az algoritmusra szorítkozom. Figyeljük meg az osztás menetét először abban az esetben, ha a kivonandó részletszorzatokat leírjuk!

$$\begin{array}{rrrrl}
E & sz & t & e & \\
9 & 6' & 3' & 1' & : 27 = \\
-8 & 1 & & & \\ \cline{1-2}
1 & 5 & 3^{+10} & & \\
-1 & 3^{+1} & 5 & & \\ \cline{1-3}
 & 1 & 8 & 1^{+10} & \\
 & -1 & 6^{+1} & 2 & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 9 &
\end{array}$$

A második illetve a harmadik kivonásnál alkalmaztam azt az elvet, hogy nem változik a különbség, ha a kisebbítendőt ugyanannyival növeljük, mint a kivonandót. (10 tízes = 1 százas, illetve 10 egyes = 1 tízes)

Ne gondoljuk azonban, hogy az ilyen lejegyzéssel (bizonyos ideig gyakoroltatva) jól előkészítettük a többjegyű számmal való osztás szokásos algoritmusát. Ugyanis, ha nem írjuk le a kivonandókat, akkor egészen másképpen végezzük el a részletszorzatok kivonását. Mégpedig az alábbiak szerint:

Az első részletszorzatot (a 81 százast) úgy vonjuk ki, hogy a százasok oszlopában kivonunk 21 százast, és az ezresek oszlopában 6 ezrest.

$$\begin{array}{rrrrl}
E & sz & t & e & \\
9 & 6 & 3 & 1 & : 27 = \\
-6^{+2} & (21) & & &
\end{array}$$

De 6 db százasból nem lehet kivonni 21 db százast, ezért a kisebbítendőhöz hozzáadunk 20 db százast, és hogy a különbség ne változzon, a kivonandóhoz 2 db ezrest adunk (20 százas = 2 ezres).

(Ez szokatlan a tanulók számára, mert az előbbiek során a kisebbítendőhöz szükség esetén annyi egységet kellett adniuk, amennyi a számrendszer alapszáma. Ennek alapján persze önállóan is rájöhetnek arra, hogy most 20 százas hozzáadása vezet célhoz.)

$$\begin{array}{rrrrl}
9 & 6^{+20} & 3' & 1' & : 27 = 3\ 5 \\
-6^{+2} & (21) & & & \\ \cline{1-2}
1 & 5 & 3 & &
\end{array}$$

A második részletszorzatot (135 tízes) úgy szokás kivonni, hogy kivonunk 35 tízest és 10 db százast. De 3 tízesből nem lehet kivonni 35 tízest. Fel kell fedeztetni a gyerekekkel, hogy ez a probléma úgy oldható meg, hogy a kisebbítendőhöz 40 db tízest adunk hozzá, a kivonandóhoz pedig 4 db százast. (Mivel 40 tízes = 4 százas, ezért az eredeti maradékot kapjuk.)

$$\begin{array}{rrrrl}
9 & 6^{+20} & 3' & 1 & : 27 = 3\ 5\ 6 \\
-6^{+2} & (21) & & & \\ \cline{1-2}
1 & 5 & 3^{+40} & & \\
-1 & 0^{+4} & (35) & & \\ \cline{1-3}
 & 1 & 8 & 1 &
\end{array}$$

A harmadik esetben a kivonandó 162 egyes. Ennek a kivonása az előbbiek alapján az alábbi lejegyzésből könnyen érthető.

$$\begin{array}{llllll}
9 & 6^{+20} & 3 & 1 : 27 = 3\,5\,6 \\
\underline{-6^{+2}} & \underline{(21)} & & \\
1 & 5 & 3^{+40} & \\
\underline{-1} & \underline{0^{+4}} & \underline{(35)} & \\
& 1 & 8 & 1^{+50} \\
& \underline{-1} & \underline{2^{+5}} & \underline{(42)} \\
& & 1 & 9
\end{array}$$

Csak az ilyen lejegyzéssel való, kellő ideig tartó szemléltetéssel képesek a tanulók megérteni és könnyebben elsajátítani a szokásos algoritmust úgy, hogy nem szükséges leírniuk a kivonandókat.

Remélem, hogy lesznek olyan kollégák mind az alsó, mind a felső tagozaton, akik dolgozatomnak valamilyen hasznát veszik.

KÖVES LÁSZLÓ

Ötletes gráfok

Gráfon általában egy véges ponthalmazt (csúcsok) értünk, amelyeket szakaszok (élek) kötnek össze. Ebben a cikkben nem a gráfokkal, és tulajdonságaikkal foglalkozunk, hanem bizonyos típusú szöveges feladatok megoldására hasznosítjuk a műveletek sorrendjét ábrázoló gráf adta ötletet.

Képzeljünk el egy közlekedési hálózatot ábrázoló gráfot (egy vasúti térképet, ahol a csúcsokat a vasúti csomópontok, míg az éleket a különböző helységeket összekötő vasútszakaszok jelentik). Ez azzal a fontos tulajdonsággal rendelkezik, hogy valamely útján haladva, minden csúcsból el lehet jutni minden csúcsba. Az ilyen gráfot *összefüggőnek* nevezünk. Az összefüggő gráfok között sajátos helyet foglalnak el az úgynevezett *„fák"*. Példaként adjuk meg a következő kifejezést helyettesítő gráfot:

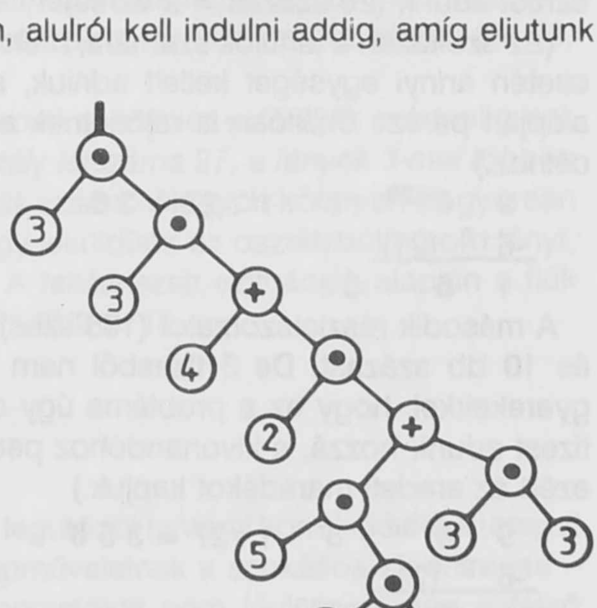
$3^2.[4+2.(5^3+3^2)]=K$

A kifejezés értékének a kiszámítása esetén, alulról kell indulni addig, amíg eljutunk a „fa" törzséhez.

Próbáljuk meg alkalmazni ezt az eljárást más hasonló kifejezés értékének a kiszámítása esetén is!

A gráffal való helyettesítés ötlete alkalmazható a következő típusú szöveges feladatok esetén is:

Egy anya néhány almát rakott az asztalra és azt mondta három fiának, hogy amikor hazajönnek az iskolából, osszák el egyenlően egymás közt azokat. Először István érkezett haza, elvette az almák egyharmadát és elment. Utána Péter jött meg, elvette az asztalon maradt almák egyharmadát és elment. Végül megérkezett János ő is, a megmaradt almák egyharmadát vette magá-



1. ábra