

Példamutató példatár

A könyvet már kissé ijesztő címe is kiemeli a szokásos feladatgyűjtemények sorából, és hogy valóban kiemelkedő, azt bizonyítják a koncepciózusan szerkesztett, alaposan átgondolt feladatok. *Bonifert Domonkos Néhány problémaszituáció matematikából* című munkájában a példákat nem annyira témájuk, hanem a megoldás során alkalmazható módszerek szerint csoportosította — jó diákok és jó tanárok számára.

Mit várunk egy ilyen példatártól? Elsősorban azt, hogy gondolkodási mintákat mutasson. Jó feladatokat választva, azokat megfelelően vizsgálja. Jó feladathoz általában nem egy módon lehet hozzájutni. Egy jó feladat tetszőlegesen továbbfejleszhető. A szerzők itt rendszerint nehéz választás elé kerülnek, mert nem minden, általunk ismert megoldást tudnak bemutatni, ami a tanulók számára természetes gondolatból indul ki, vagy valami olyan ötletet tartalmaz, amely bár nem annyira kezenfekvő, mégis tanulságos. Az utóbbinál az a kérdés merül fel, hogy ilyen honnan juthat az ember eszébe?

Példaként vegyük a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget: a_1, a_2, \dots, a_n pozitív számok és $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$. A tanulók legtöbbször azt javasolják, hogy próbáljuk meg teljes indukcióval. Ez járható út; $n=2$ -re könnyű belátni az állítást, és feltéve, hogy igaz az egyenlőtlenség n -re, megmutatjuk, hogy igaz $n+1$ -re is, de ez elég bonyolult számolással jár. Könnyebb 2^k -ről 2^{k+1} -re következtetni, és azután $n+1$ -ről n -re „visszalépni”. De ezt a tanulókból „kihúzni” sokkal nehezebb! Emellett aztán ismer a könyvíró néhány más, különböző ötletekből kiinduló bizonyítást is. Mit írjon le? Mit részesítsen előnyben? *Bonifert Domonkos* a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget egy önmagában is rendkívül érdekes észrevétel segítségével tárgyalja: ha a_1, a_2, \dots, a_n és b_1, b_2, \dots, b_n pozitív valós számokból álló két szám n -es; legyen c_1, c_2, \dots, c_n a b_1, b_2, \dots, b_n tetszőlegesen választott permutációja és képezzük a következő összeget: $a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$. Ez az összeg akkor lesz maximális (minimális), ha az a_1, a_2, \dots, a_n és c_1, c_2, \dots, c_n egyenlően (ellentétesen) van rendezve. Ennek bizonyítása tanulságos és messzire mutató. Nagyon lényeges, hogy tudjuk, hogy létezik maximum, hiszen a tekintett összegre véges sok lehetőség van, és ezek között mindig van legnagyobb és legkisebb. Ezután azt mutatja meg a szerző, hogy ha az a_1, a_2, \dots, a_n és c_1, c_2, \dots, c_n nem egyenlően vannak rendezve, akkor az $a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$ összeg, a c -k más sorrendjét véve növelhető, következésképpen nem lehet maximális. Ez a gondolatmenet másutt is alkalmazható, hiszen nevezetes problémákkal kapcsolatban több hasonló szerkezetű bizonyítás fordul elő a matematika történetében. Ilyen dolgokat kell a jó feladatgyűjteménybe beletenni, és ebben a könyvben sok ilyen található. Az előbbi eredmény alkalmazásaként, megfelelően választott szám n -esekkel, nagyon röviden megkapjuk a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget. (Kár, hogy az imént felvázolt szélsőérték-probléma tárgyalásában elírás van, bár új kiadás esetén könnyen javítható.)

Ha a tanár feldolgozza az előbbi kérdést, akkor — tanulóktól függően — a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség elé nyilvánvalóan be fog iktatni „lépcsőket”, egyszerűbb feladatokat.

A jó példatár fontos tulajdonsága, hogy vannak benne jó feladatsorok, egymásra épülő példák, némelyik több megoldással. Ilyen is sok található a gyűjteményben. Egyik

kedvencem a harmonikus sor divergenciája (persze így nincs kimondva) különböző becslésekkel. A „magasabb” matematika szempontjából rendkívül lényeges, hogy a tanulókat hozzászoktassuk az ilyen becslésekhez.

Hadd jellemezzem a könyvet még egy nagyon érdekes feladatcsokor egyik példájával! *Tekintsünk egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget! Az oldalait osszuk három egyenlő részre, majd a középső szakaszok fölé rajzoljunk egyenlő oldalú háromszögeket! Hagyjuk el a középső szakaszokat! Így olyan sokszöget kapunk, amelynek minden oldala egyharmad. Ezt az eljárást n -szer megismételve határozzuk meg a kapott sokszög oldalainak hosszát, számát, kerületét és területét!*

A szerző a pontos válasz után megállapítja, hogy a sokszög kerülete n növelésével akármilyen nagyra tehető, területe viszont korlátos. A megjegyzésben már határértékről is szó esik. A tanár feladata eldönteni, hogy a tanulók szintjétől függően hol kell megállni a vizsgáldásban. Szép, rendkívül érdekes feladat, ami jól előkészíti a határérték korántsem könnyű fogalmát.

Ezek alapján mondhatjuk, hogy ez a feladatgyűjtemény nagyon hasznos a tanulók rendszeres gondolkodásra nevelésében, és több, később fontossá váló fogalom gyökerének elültetésében. Felhívom a figyelmet a feladatokhoz kapcsolódó, pedagógusi tapasztalatot rögzítő megjegyzések fontosságára.

Ajánlom a könyvet minden általános és középiskolában tevékenykedő matematika-tanárnak és érdeklődő diáknak — biztosan haszonnal forgatják majd.

Bonifert Domonkos: Néhány problémaszituáció matematikából. MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1992.

PINTÉR KLÁRA

„Mondd mama, a magyar nyelvet te találtad ki?”

Furcsa könyv Szépfalusi István „Lássátok, halljátok egymást!” című műve. Ha szociológiként olvasom, elborzadok. Úgy ír az Ausztriában élő magyarokról, hogy vizsgálati mintája a magyarul beszélő evangélikusok egy sajátos csoportja, azok, akik hajlandóak voltak kérdőívére válaszolni. Ráadásul a kérdőív is hagy kívánnivalót maga után, mert azt feltételezi, hogy kitöltői ágostai evangélikus hitvallású aktív hívők.

Ha szociográfiának tekintjük, akkor kissé vaskos és nehézkes; túl sok a táblázat, a dokumentum és a magyarázó betét. Az elkényeztetett magyar olvasó a szociográfiától olvasmányosságot és szépirodalmi megformáltságot vár.

Ha azonban annak tekintjük, ami: egy tudós és ambiciózus lelkes kérdőívvel kombinált családlátogatásaiból született könyvnek, amelyben a tényszerű adatokat jóízű beszélgetések egészítik ki, és amelyben a rábízott nyájt jól ismerő, kellemesen fogalmazó értelmiségi okos reflexiói találhatóak – nos, akkor kitűnő olvasmány.

Ha lenne Ausztria felfedezése sorozat, abban lenne e kötet helye, hiszen elsősorban az osztrák létről szól mai olvasóknak. A beszélgetőpartnerek döntő többségében semmiféle görcsöt nem okoz, hogy ők magyarul is beszélő osztrák állampolgárok. Életvitelük, életmódjuk és életszínvonaluk tekintetében is osztrákok, semmi nem emlékeztet a magyar viszonyokra. A magyar olvasó az Ausztriában élő családok mindennapi gondjaiba kap bepillantást – a hetvenes években –, s ha őszinte akar lenni, akkor irigykedik. Kiegyensúlyozott, békés polgári lét nyomairól árulkodnak a beszél-