A magyar módszer

HUJTER MIHÁLY

Ebben a tanulmányban három magyar matematikai felfedezésről lesz szó. Mindegyik alapvető jelentőségű mind az elmélet, mind a gyakorlati alkalmazás szempontjából. Mindegyik egész tudományágak kifejlesztését indította el. Sajnálatos módon azonban Magyarországon az oktatásban nem nagyon esik szó egyik felfedezésről sem.

Mindhárom felfedezés tipikusan magyar gondolkodásmódot tükröz. Közös lényegük, hogy egy-egy problémára konstruktív és frappáns megoldást adnak. Huszárosan a dolgok közepébe vágva megmutatják, mi a probléma megoldásánál a lényeg. (A dolgok közepébe vágás majdnem szó szerint értendő, mert mindegyik eredmény egyfajta szétvágása az összes lehetőségnek két világosan elkülöníthető osztályba.) De mindhárman nemcsak a megoldást adják meg, hanem annak helyességét is kézenfekvővé teszik. Már csak azért is tanítani kellene ezeket az eredményeket.

A három magyar matematikus: *Farkas Gyula* (1847-1930), *Kőnig Dénes* (1884-1944) és *Neumann János* (1903-1957). A három eredmény a következő három néven ismeretes a nemzetközi szakirodalomban: *Farkas-lemma* (1902), Kőnig-féle *magyar módszer* (1916) és a Neumann-féle *nyeregponttétel* (1928). Ebben a kéziratban egy-egy rendkívül leegyszerűsített példa segítségével próbáljuk meg felvillantani a három felfedezés lényegét. A három példa sok hasonlóságot mutat, és ez nem véletlen. Ha évtizedekkel később is, de kiderült, hogy a szóbanforgó három felfedezés – bár egymástól függetlenül keletkezett – elméletileg szoros kapcsolatban áll egymással. Tulajdonképpen egymásból is levezethetők. Közös lényegük az operációkutatás tudományág egyik legfontosabb tétele, az ún. dualitás-tétel. (A dualitás-tétel első megfogalmazója egyébként éppen Neumann János volt 1947-ben.)

A *Farkas-lemma* egy egyszerűsített változata a következő: n darab ismeretlen valós számról (x, y, z,...) annyit tudunk, hogy érvényes rájuk m darab "⌋0" típusú egyenlőtlegség, melyeket (1), (2), ..., (m) jelekkel jelölünk. Ezek az egyenlőtlegségek mind olyan alakúak, hogy az n ismeretlen közül néhány (legalább egy, legfeljebb n-1 darab) tetszőlegesen kiválasztott ismeretlen összege nem negatív. Azt kellene eldönteni, hogy vajon biztosan állíthatjuk-e, hogy az összes ismeretlen összege is nemnegatív. (Azt az egyenlőtlenséget, mely az összes ismeretlen összegének nemnegativitását állítja, (*)-gal jelöljük.)

Nézzünk mindjárt egy példát! Tegyük fel, hogy tudjuk a következőket:

(1) $$x+y+z+u \geq 0$$

(2) $$x+y+v \geq 0$$

(3) $$y+z+u+v \geq 0$$

Következik-e ezekből az alábbi?

(*) $$x+y+z+u+v \geq 0$$

Vagy igen, vagy nem! De ezt hogyan tudjuk eldönteni? És ha már tudjuk a választ (mert vagy megsejtjük, vagy azt súgja valaki, vagy valamilyen rövidebb-hosszabb,esetleg hibás matematikai okoskodás révén kiszámítjuk), akkor *hogyan tudjuk az eredményt* egyszerű módon *ellenőrizni?*

Ha azt kíséreljük meg bizonyítani, hogy az utolsó egyenlőtlenség nem következik az előzőekből, akkor a bizonyításunk nagyon frappáns lehet úgy, hogy *mutatunk egy ellenpéldát.* Azaz mutatunk olyan x, y, z, ... értékeket (ráadásul mindegyik egy-egy egész szám), melyekre (1), (2), ..., (m) mindegyike fennáll, de (*) mégsem. (Természetesen az általunk megadandó értékek között negatív számnak is kell lenni.) A fenti példánál az x=z=u=v=-1, y=3 értékek mutatják, hogy (*) nem következik az (1), (2) és (3) egyenlőtlenségekből.

De mi van akkor, *ha mégis következik* az utolsó egyenlőtlenség az előzőekből? Akkor ezt a tényt hogyan tudnánk bizonyítani? A válasz az, hogy valahogyan *levezetjük* (*)-ot (1), (2), ..., (m)-ből. Például úgy, hogy valamely nemnegatív egész α, β, γ, ... számokkal megszorozzuk a megadott n egyenlőtlenséget, aztán az így nyert egyenlőtlenségeket mind összeadjuk. (A dolognak – természetesen – csak úgy van értelmeg, ha $0<\alpha+\beta+\gamma+\ldots$) Ha sikerül elérnünk α, β, γ, ... ügyes megválasztása révén, hogy a megkapott összeg-egyenlőtlenségben minden ismeretlen együtthatója azonos szám legyen, akkor ezzel a számmal leosztva a szóbanforgó összeg-egyenlőtlenségnek éppen (*) egy bizonyítását nyerjük.

A fentieket azzal a *példával illusztráljuk,* amikor a fenti harmadik egyenlőtlenségből töröljük az y ismeretlent. Tehát most azt kellene bizonyítanunk, hogy az

$$x+y+z+u \geq 0$$
$$x+y+v \geq 0$$
$$z+u+v \geq 0$$

egyenlőtlenségekből következik az

$$x+y+z+u+v \geq 0$$

egyenlőtlenség. Valóban, már egyszerűen $\alpha=\beta=\gamma=1$ értékekre is célt érünk, hiszen az első három egyenlőtlenség összege

$$2x+2y+2z+2u+2v \geq 0$$

azaz

$$x+y+z+u+v \geq 0$$

Farkas Gyula azt *bizonyította* be (tulajdonképpen sokkal általánosabb formában), hogy akármi is az igazság a megadott n ismeretlenre és m egyenlőtlenségre, *a fenti két módszer valamelyikével mindig bizonyítani lehet azt, ami* adott egyenlőtlenségekre éppen *igaz.* Természetesen azt még ki kell találni, hogy mik legyenek az ellenpéldában az ismeretlenek értékei vagy mik legyenek az α, β, γ, ... értékek. De erre is ismerünk konstruktív kiszámítási módszereket. (Sajnos ezek részletezésére itt és most nem kerülhet sor. Bizonyos esetekben például éppen a később ismertetendő magyar módszer nyújthat segítséget.)

Most rátérünk *Neumann János tétele* egy speciális esetének ismertetésére egy példa révén. Képzeljük el, hogy egy vizsgára készülünk. Tegyük fel, hogy (ajánlott irodalomként megadott) m darab könyv együtt tartalmazza az anyagot, viszont nekünk csak egyetlen könyv elolvasására maradt időnk. Kihírdették előre, hogy milyen kérdések lehetnek majd a vizsgán (n darab), amiből egyet fogunk megkapni. A kérdést nem húzzuk, hanem kapjuk majd a vizsgáztatótól, ezért azzal is számolnunk kell, hogy a nehezebb kérdéseket nagyobb valószínűséggel is adhatja. Minden esetre minden kiválasztható könyvhöz és minden lehetséges kérdéshez *tudjuk előre* (például a könyvek tartalomjegyzékét átfutva), hogy tudjuk-e majd a vizsgán a választ vagy sem. Ezeket az adatokat egy táblázatba foglaljuk. A táblázatnak m sora lesz és n oszlopa. Az i-edik sor és a j-edik oszlop metszetébe egy csillagot teszünk akkor, ha az i-edik könyvet elolvasván meg tudjuk majd válaszolni a j-edik kérdést (ha nem tudjuk majd megválaszolni, üresen hagyjuk a helyet). Most azt szeretnénk tudni, hogy milyen megfontolás alapján válasszuk ki az elolvasandó könyvet, hogy minél kisebb esélyünk legyen a bukásra. Hangsúlyozzuk, hogy az esély itt úgy számítandó, hogy nem tudjuk, melyik kérdést milyen valószínűséggel kapjuk majd meg, sőt inkább azt kell feltételeznünk, hogy éppen arra törekedik majd a vizsgáztató, hogy minél nagyobb valószínűséggel megbuktasson bennünket. (Itt a szerző megköveti a feltételezés miatt mindazon olvasóit, akik maguk is vizsgáztatni szoktak, és nem értenek egyet az ilyen stílusú vizsgáztatással. Maga a szerző sem ilyen elvek alapján szokott vizsgáztatni.)

Nézzünk egy konkrét példát! Tegyük fel, hogy a táblázatunk a következő:

*	*					
	*	*		*		
			*		*	
*		*				*
	*			*		
	*	*				
		*		*		

Próbáljunk először megválaszolni például egy olyan kérdést, hogy *van-e* mindenképpen *legalább* $1/3$ *esélyünk* arra, hogy átmenjünk a vizsgán, ha jól választjuk meg a könyvet. Ha tudnánk például azt, hogy mind a 7 kérdés egyformán valószínű, akkor a 2. könyvet választanánk, és $3/7$ lenne az esélyünk a sikeres vizsgára, hiszen a kérdéseknek pontosan a $3/7$-ére tanuljuk meg a választ. De a vizsgáztató akár előre eldöntötten kérdezheti a 4. kérdést (mivel azt vélheti legnehezebbnek), ami számunkra biztos bukást jelent, ha a 3. könyv elolvasását eleve kizárjuk. Viszont azt sem mondhatjuk, hogy a 3. könyv a legjobb, hiszen ezt elolvasván csak a 4. vagy a 6. kérdésre tudunk majd válaszolni.

Most a fenti példára bebizonyítjuk, hogy egy kis *kockázatvállalás* révén ugyan, $1/3$-nyi esélyt mindenképpen el tudunk érni a sikeres vizsgára. Nézzük meg hirtelen a karóránk másodpercmutatóját, és annak függvényében, hol áll a mutató, válasszunk egy könyvet. Ha az első 10 másodpercben áll, a 2. könyvet válasszuk, ha a második vagy harmadik 10 másodpercben, a 3. könyvet, ha a negyedik vagy ötödik 10 másodpercben, akkor a 4. könyvet, ha az utolsó 10 másodpercben, akkor az 5. könyvet. Az első és a két utolsó könyvnek pedig ne adjunk semmi esélyt. Mit érünk el ezzel? Azt, hogy most bármit is kérdez a tanár, legalább $1/3$ esélyünk mindenképpen lesz arra, hogy átmenjünk, hiszen mindegyik oszlop esetében az oszlopbeli csillagokra együtt legalább "20 másodpercnyi esély" jut.

Most vizsgáljuk meg a kérdést 33% helyett 34%-os esélyre. Próbáljunk meg *találni egy* olyan *súlyozást* a sorokra, hogy minden kérdésnél legalább 34% esélyünk legyen. Súlyozáson olyan P_1, P_2, ..., P_m nemnegatív racionális számokat értünk, melyek összege 1, és az 1., 2., ..., n számok közül minden egyes j értékre azt szeretnénk, hogy mindazon P_i számok összege, melyekre a j-edik oszlop i-edik eleme egy csillagot tartalmaz, legalább 0,34. Sehogyan sem fog sikerülni ilyen súlyozást találni! Állítjuk, hogy ez azt jelenti, hogy nem is lehetséges egy ügyes tanár ellenében esélyeinket 34%-ra növelni. De miért? Próbáljuk meg most ezt bizonyítani. Konkrét példánk esetében a tanárt semmi sem akadályozza abban, hogy például csak az első és a két utolsó kérdés közül válogasson, ráadásul egyforma valószínűséggel adja ezek bármelyikét. Ekkor – mivel egy olyan könyv sincs, amivel egyszerre két vagy három kérdésre is "rá tudunk készülni" ezen három kérdés közül – esélyeinket nem tudjuk ⅓ fölé vinni.

Ezt *a* fajta *bizonyítási módot* a következőképpen *általánosíthatjuk:* Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy bizonyos $0 \leq v \leq 1$ számára nem tudjuk az esélyeinket v fölé vinni, akkor megpróbálkozhatunk olyan $q_1, q_2, \ldots, q_n$ nemnegatív racionális számok keresésével, melyek összege 1, és bármely i-re (i=1, 2, ..., m), mindazon q_j számok összege legalább v, ahol az i-edik sor és a j-edik oszlop metszetében csillag van. Ha található az oszlopoknak ilyen súlyozása, akkor a tanár a súlyozás mentén választva a kérdések kérdezésének valószínűségét eléri, hogy ne legyen v-nél nagyobb esélyünk egyik könyvre sem.

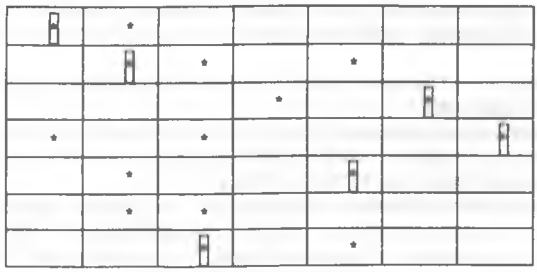
Neumann János bebizonyította (általánosabb tétel formájában), hogy minden $0 \leq v \leq 1$ értékre vagy a sorokra, vagy az oszlopokra egy fenti értelemben vett súlyozás mindig található. A súlyozások megkeresésének módját most nem tudjuk részletezni. Csupán annyit mondunk róla, hogy lényegében ugyanúgy kereshetők a súlyok, mint a Farkas-lemma esetében az egyenletek szorzói ill. az ellenpélda változóértékei.

Most már rátérünk a *Kőnig-tételre.* Most is adott egy ugyanolyan táblázat, mint az előző feladat esetében, de most azt is feltesszük, hogy m=n. Most azt kérdezzük, hogy legfeljebb hány csillagot lehet bekarikázni a táblázatban úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban legfeljebb egy csillag legyen bekarikázva. (Jelölje ezt a legnagyobb számot μ.)

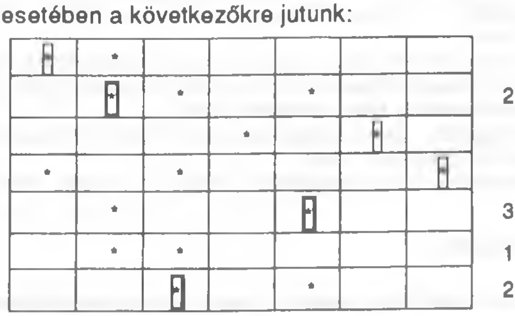
Természetesen az összes lehetséges esetet végig lehetne próbálni, de ez túl sokáig tartana. Frappánsabb megoldást keresünk. Például azt állítjuk, hogy a fenti konkrét példa esetében a $\mu = 6$. Azt, hogy pl. 5 csillagot be lehet karikázni, könnyen bizonyítjuk, mert egyszerűen mutatunk egy példát (l. alább). Az érdekesebb kérdés az, ha lehet, hogyan lehet többet, ha nem, miért nem. Azt, hogy μ-nél többet nem lehet, például úgy lehetne bizonyítani, hogy mutatunk k számú sort és μ-k számú oszlopot úgy, hogy ezek együtt az összes létező csillagot tartalmazzák. Ez – gondoljuk csak meg – már kizárja, hogy μ-nél több csillag legyen bekarikázható. *Kőnig Dénes bebizonyította,* bármely μ értékre vagy találhatók ilyen sorok és oszlopok, vagy pedig μ darab csillag bekarikázható.

*	*					
	*	*		*		
			*		*	
*		*				*
	*			*		
	*	*				
		*		*		

Kőnig tételének *bizonyítását* fel is vázoljuk: Tegyük fel, hogy M darab csillagot be tudtunk karikázni a táblázatban. Most egy 1-es szám odaírásával jelöljük meg mindazokat a sorokat, melyek nem tartalmaznak bekarikázott csillagot. (A konkrét példánkon M=5, és a 2. és 6. sorok kapnak egy-egy 1-est.) Ezután nézzük meg, van-e olyan sor, amely sem nem tartalmaz bekarikázott csillagot, sem nincs megjelölve számmal. Ha találunk egy vagy több ilyen sort, mindegyikbe próbáljunk találni egy olyan csillagot, amelyik oszlopában még nincs bekarikázott csillag. Ha sikerül ilyen csillagot találni, már meg is tudtuk növelni M értékét. Ha nem, minden 1-es jelű sor minden csillagának oszlopaiban a bekarikázott csillagokat karikázzuk be duplán, és próbáljunk meg a duplán bekarikázott csillagok soraiban olyan csillagot keresni, aminek oszlopában még egyik csillag sincs bekarikázva. (Konkrét példánk esetében a baloldali három csillag kerül duplán bekarikázásra.) Ha sikerül ilyen szabad csillagot találni, akkor ezt bekarikázhatnánk, a sorában a bekarikázott csillag bekarikázását feloldhatnánk, és annak oszlopában találnánk egy másik bekarikázható csillagot. Így M értékét tudnánk növelni. Konkrét példánkban az első oszlopban van egy szabad csillag. Így a következő konfigurációt nyerjük:



Most ebből a helyzetből *csináljuk ugyanazt,* mint fent. A példánk esetében a 6. sor kap egy 1-es jelet, és a balról második és harmadik bekarikázott csillag lesz duplán bekarikázva. Ezen utóbbiak soraiban nincs szabad csillag. Ezért ezeket a sorokat 2-es jellel jelöljük meg, és a 2-es jelű sorokkal csináljuk ugyanazt, mint az előbb az 1-es sorokkal. Ha találunk szabad csillagot a 2-es jelű sorok szimplán bekarikázott csillagainak oszlopaiban, akkor tudjuk növelni M értékét. Ha nem, 3-as jelű sorokat nyerünk, és ezt az eljárást folytatjuk amíg csak lehet. Végül is vagy tudjuk növelni M értékét, vagy pedig néhány sort számmal megjelölünk úgy, hogy a megjelölt sorok egyikében sincs szabad csillag, de a legnagyobb számmal megjelölt sor csillagainak oszlopaiban minden bekarikázott csillag duplán is bekarikázott már. Most azt kell észrevennünk, hogy a duplán bekarikázott csillagok oszlopai és a szimplán bekarikázott csillagok sorai együtt az összes be nem karikázott csillagot is tartalmazzák. Azaz megkonstruáltuk az M=μ egyenlőséget bizonyító sorokat és oszlopokat. A konkrét példánk esetében a következőkre jutunk:



Valóban, az 1., 3. és 4. sorok, továbbá a 2., 3. és 5. oszlopok minden csillagot tartalmaznak. Azaz μ = 6.

Azzal a megjegyzéssel zárjuk ezt az írást, hogy Kőnig Dénes fent említett módszerét *Egerváry Jenő* (1891-1958) fejlesztette tovább 1931-ben. Az amerikai *Kuhn* 1955-ben *Kőnigről és Egerváryról* nevezte el a módszert *"Hungarian method"*-nak, azaz magyar módszernek. Ezen a néven tanítják szerte a világon. A módszer mind oktatási, mind elméleti, mind gyakorlati szempontból nagyon jelentős. Gyakorlati szempontból talán az ún. *szállítási feladat* megoldásánál a legjelentősebb, de egészen meglepő alkalmazásai is vannak, például anyagszerkezeti vizsgálatoknál. (A jelen sorok szerzője pl. a MALÉV menetrendje tervezéséhez tudta segítségül hívni.)

MAGYAR NYELVŰ IRODALOM

Andrásfai B.: *Ismerkedés a gráfelmélettel,* Budapest, Tankönyvkiadó, 1973.
Dormány M.: *Operációkutatás,* I-II. Budapest, Tankönyvkiadó, 1989.
Egerváry J.: *Mátrixok kombinatórikus tulajdonságairól,* Matematikai és Fizikai Lapok 38 (1931) 16-28. p.
Gács P. – Lovász L.: *Algoritmusok* (2. javított kiadás), Budapest, Tankönyvkiadó, 1987.
Kaufman A.: *Az operációkutatás módszerei és modelljei,* Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1968. (fordítás)
Kemény J. G. – Snell J. L. – Thompson G. L.: *A modern matematika alapjai,* Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1971. (fordítás)
Klafszky E.: *Hálózati folyamok,* Budapest, Bolyai János Matematikai Társulat, 1969.
Kőnig D.: *Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és halmazok elméletében.* Matematikai és Természettudományi Értesítő 34 (1916) 104-119. p.
Krekó B.: *Lineáris programozás,* Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1966.
Nagy T.: *Matematikai programozás,* Miskolc, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
Prékopa A.: *Lineáris programozás I.,* Budapest, Bolyai János Matematikai Társulat, 1968.
Szép J. – Forgó F.: *Bevezetés a játékelméletbe.* Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1974.
Vincze I.: *A játékelméletről,* Természettudományi Közlöny, Budapest, 1963-1964.
Williams J. D.: *Játékelmélet,* Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1972. (fordítás)

ANGOL NYELVŰ IRODALOM:

Andrásfai B.: *Introductory Graph Theory,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.
Kohn H. W.: *The Hungarian method for the assignment problems,* Naval Res. Logist. Quart. 2 (1955) 83-87. p.
Kuhn H. W.: *Variations of the Hungarian method for the assignment problems,* Navas. Res. Logist. Quart. 3 (1956) 243-258. p.
Lovász L. – Plummer M. D.: *Matching Theory,* Akadémiai Kiadó and North-Holland, Budapest and Amsterdam, 1986.
McKinsey J. C. C.: *Theory of Games,* McGraw-Hill, New York, 1952.
Molnár É. – Erdélyi Z. – Klafszky E.: *Network Flows and Transportation,* Miskolc, 1989.
Neumann J. – Morgenstern O.: *Theory of Games and Exonomic Behavior,* Princeton University Press, Princeton, 1953.
Neumann J.: *A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem,* In: Contributions to the Theory of Games II, Ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. of Math. Studies 28, Princeton University Press, Princeton, 1985.
Papadimitriou C. H. – Steiglitz K.: *Combinatorial Optimization:* Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ07632, 1982.
Vajda S.: *Theory of Games and Linear Programming,* Methnen, London, 1956.

NÉMET NYELVŰ IRODALOM:

Farkas J.: *Theorie der Einfachen Ungleichunger,* J. Reine und Angewandte Math. 124 (1902) 1-27.
König D.: *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantectheorie und Mengenlehre,* Mathematische Annalen 77 (1916) 453-465.
König D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Akademische Verlagsgesselschaft, Leipzig, 1936.

Hozzáteszem...

...hogy a magyar módszerről a Miskolci Egyetemen hallottam először, egy szakmai tanácskozáson. A téma is érdekes volt, de Hujter Mihály is igen érti a módját az érdeklődésfelkeltésnek és a figyelem ébrentartásának. Nagyszerű, szellemes előadását nagyon élveztem. Természetes, hogy megkérdeztem, megírná-e a lapnak. Válaszképpen kezembe nyomott egy füzetet, egy ízléses kivitelű, jól szerkesztett kiadványt, a Pi matematikai folyóirat 91/92-es első számát – "ebben megtalálod".

A Pi a Miskolci Egyetemen és körzetében dolgozó matematikatanárok és diákjaik számára készülő újság. "Szándék szerint évente kétszer jelenik meg, a tanév felosztásának megfelelően"

– olvasható az első oldalán.

Színvonaláról az átvett cikk is tanúskodik, de lapozzuk végig a(z eddig egyetlen) számot!

Az első oldalakon *Páczelt István* dékán ad hírt a szeptemberben induló, új matematikus-mérnök szakról. (Erről az *Iskolakultúra 1991/10. szám* hírei között is részletesen olvashatnak az érdeklődők.)

Kiss Elemér marosvásárhelyi tanár cikkének témája az analógia alapján való következtetés szerepe a plauzibilis sejtésben. Címe *Az analógia szerepe a mértan feladatok megoldásában.*

Hujter Mihály írása következik *Magyar módszer a kombinatorikában és az operációkutatásban.*

A *Feed-back* az 1991-es és 92-es felvételi feladatokat, az elmúlt évi *Kürschák József Matematikai Tanulóverseny* és a *Schweitzer Miklós Emlékverseny* feladatait tartalmazza. Találhatunk még itt általános iskolásoknak, középiskolásoknak és egyetemistáknak szóló – a tanári munkát ill. a felkészülést segítő – feladatokat a matematika számos területéről. A füzetet *Soós Ferenc* érdekes fraktál-képei díszítik. Ezeket néhány szóval be is mutatja alkotójuk.

Most készül a Pi második száma. A lap munkáját segíteni szándékozó cikkek, feladatok megoldások a következő címre küldhetők:

Körtesi Péter,
Miskolci Egyetem Matematikai Intézet,
MISKOLC 3515.

A SZERKESZTŐ