Röviden a rácsgeometriáról

CSÓKA GÉZA

A nagysikerű Öveges József Emlékverseny résztvevőinek '91 őszén másfélórás előadást tartottam Tatán. Megragadott a zömében elsős, másodikos gimnazista hallgatóság érdeklődő, fegyelmezett, de legalábbis türelmes viselkedése, ahogy a verseny fáradalmai után még követték az előadást. Ez ösztönzött arra, hogy a diszkrét pontrendszerek témakörének e számomra oly kedves részét alapfokon leírjam.

Ki ne látott volna rácsot? (Már a babiloniak is.) Rács van az ablakon, rácsszerűen telepítik a gyömölcsöst, vonalazzák a füzetet. Jelenti ez pontok végtelen szabályszerű elhelyezkedését, hogy bármelyikből tekintve az egész ugyanolyannak látszik. Az *egyenesen* a *rács* egy egyenlőközű pontrendszert jelent, egyetlen jellemzője a szomszédos pontok távolsága. Ennek számszorosával eltolva a rendszer önmagába meg át (1. ábra).

Vegyünk föl a síkon egy Oij derékszögű descartes-i koordinátarendszert és adjunk meg két, nem párhuzamos **u** és **v** vektort! A $\Gamma=\{\mathbf{p} \mid \mathbf{p}=x\mathbf{u}+y\mathbf{v};\ x,\ y \text{ egész}\}$ ponthalmazt rácsnak nevezzük, az **u** és **v** vektorokat pedig a rács *bázis*ának (2. ábra). Az x és y egészek az adott pont koordinátái az **u**, **v** bázisban. Ha az origót egy másik rácspontba vennénk föl, ugyanezen bázissal ugyanezt a rácsot kapnánk. Ha a rács pontjaiban kezdődő és végződő vektorokat *rácsvektornak* nevezzük, akkor úgy is mondhatjuk, hogy a rács egy rácsvektorral való eltoláskor önmagába megy át. A rácsot egy olyan pont pályájának is tekinthetjük, amelyre az összes a**u**+b**v** alakú eltolást alkalmazzuk, a, b egészekkel. A transzformációs szemléletet erősítendő alkalmazhatunk $\mathbf{u}^a\mathbf{v}^b$ jelölést is. A síknak a rácshoz tartozó pontjait az adott alakú eltolásokra *ekvivalens*eknek mondjuk.

1. ábra

2. ábra

Primitív az az origóból kiinduló a**u**+b**v** *rácsvektor*, melynek csak végpontjai rácspontok. Ennek föltétele, hogy a és b lnko-ja ±1 legyen. *(1: Van-e tetszőlegesen hosszú primitív vektor? 2: Ha P(au+bv) és Q(cu+dv); mi a feltétele, hogy a PQ szakaszon ne legyen más rácspont?)* Mint a 2. ábrán láthatjuk, a Γ rácsot úgy is értelmezhetjük, hogy például az **u** által megadott Γ_0 egyenesrácsot eltoljuk a b**v** vektorokkal, b egész. A b=1, 2,... értékekhez tartozó egyenesrácsot első, második stb. *rácsréteg*nek mondjuk. Nyilván síkrácsunkat egy, a síkkal nem párhuzamos **w** vektor c**w** egész számszorosaival eltologatva térbeli rácsot kapnánk, amelynek a kiindulási rács nulladik rácssíkja. Az ilyen, egyenlő távolságra lévő síkok révén adódó hulláminterferencia a kristályok tanulmányozásának egyik legfontosabb eleme.

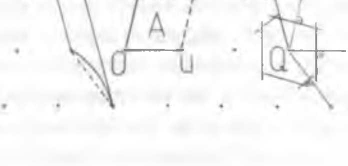
Rácsegyenes a sík azon egyenese, amelyen van legalább két rácspont *(3: Van-e végtelen sok is?).* Ezzel kapcsolatos egy átláthatósági kérdés: egy rácspontból, például az origóból húzott félegyenesen mikor van további rácspont? *(4: Adjunk választ négyzetrács esetén.)*

A 2. ábrán követhetjük, hogy nem csak **u** és **v** lehet bázisa a rácsnak, hanem például **u**-hoz választható bármelyik, a **v**-szerinti első rácsrétegbe mutató vektor és csak az; pl. k$\mathbf{v}_1$ is ugyanazon rácsrétegekbe fogja eltolni az **u** szerinti egydimenziós Γ_0 egyenesrácsot. Tehát egy rács, sok bázis. A $\mathbf{v}_1$ vektor példájában a két különböző bázis: **u** és **v**, valamint **u** és $\mathbf{v}_1$ azonos területű *(alap-) paralelogrammát* határoz meg. Ez a rácsparallelogramma csak csúcsán tartalmaz rácspontot, az ilyent *üres*nek nevezik. Egy **u**, **v** bázis által adott alapparallelogramma csak üres lehet, hiszen a nem csúcsában lévő síkpont koordinátája az **u**, **v**-re vonatkozóan nem egész, tehát ilyen rácspont nincs.

Két nehéz kérdés: *egy üres paralelogramma oldalai mindig bázist adnak-e? Ha az **u**, **v** bázisban fölírunk két vektort, vajon **f**=a**u**+b**v** és **q**=c**v**+d**v** mikor adják egy bázisát a rácsnak? Ez ugyanazon kérdés geometriai, illetve algebrai fölvetése, a válasz az elsőre igenlő, a másodikra: ha ad-bc=±1.* (1)

Már volt szó arról, hogy a rács az a**u**+b**v** alakú eltolásokra nézve az origóval ekvivalens pontok halmaza. A sík két (nem rács-) pontját is ekvivalensnek nevezzük, ha a rács valamely vektorával egymásra tolhatók. A sík pontjait ezáltal osztályokba soroltuk, nevezzük *alaptartomány*nak a sík azon részét, mely minden osztályból egyetlen elemet tartalmaz. Az ilyen "nem ekvivalens pontok maximális halmazára" jó példa az **u**, **v** alapparalelogramma ha elhagyjuk két élét. Egész pontosan az $A=\{\mathbf{p} \mid \mathbf{p}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v};\ 0\leq\alpha,\beta\leq 1\}$ részben zárt négyszög. (3. ábra.) *(5: Gyakorlásképpen igazoljuk!)*

Az A tartományt minden rácspontba eltolva a sík egyrétű és hézagmentes lefedését kapjuk, ezt mozaiknak is nevezik. Ha A-t egyik oldala mentén megtoldjuk egy kisebb alakzattal, amellyel egybevágó részt a párhuzamos oldal mentén elhagyunk, ismét alaptartományhoz jutunk. Ez a művészi díszítés egyik alapötlete, amelyhez mi csak egy halovány szemléltetést adunk a 4. ábrán. Kitűnő, látványos irodalma van (2).



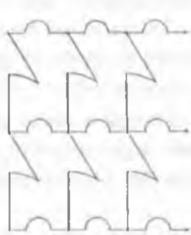
3. ábra

Magasabb dimenzióban, tetszőleges bázissal megadott rács esetén komoly probléma a legrövidebb rácsvektor fölkutatása. Az ezt szolgáló algoritmusok vizsgálata helyett bizonyítsuk be: *6: Minden rácsnak van legrövidebb vektora, 7: A síkrács legrövidebb és vele nem párhuzamos legrövidebb vektora együtt bázist alkot.* Ez utóbbi, tehát hogy a *sorozatos minimumvektorok* rendszere bázis, nem igaz feltétlenül a 3-nál nagyobb dimenziós rácsokra. Ellenpélda a 4 dimenziós egységkocka egy csúcsból kiinduló három éle és testközéppontja által megadott rács. A testközéppont helyvektora $\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}=1$ hosszúságú, tehát a legrövidebb vektorok válogatásánál a négy egy csúcsból kiinduló él és a fél testátló jöhet szóba. Ebből a négy él nem alkot bázist, hiszen rendszerében a testközéppont koordinátái: ½, ½, ½, ½, - nem egészek! *8: Síkrácsban legföljebb hány legrövidebb vektor lehet?* Egy Q rácspont (Dirichlet-Voronoj-) *celláját* alkotja a sík azon X pontjainak összessége, amelyekre $QX \leq PX$, P és Q nem azonos rácspontok. Nyilván a Q-ból kiinduló primitív vektorok felezőmerőlegeseit kell megrajzolni és az adódó félsíkok közül a Q-t tartalmazók metszete az alakzat (4. ábra). *9: A cella Q-ra szimmetrikus, véges oldalszámú sokszög 10: Rombuszrács –* $|u| = |v|$ *– cellája mikor négyszög?*

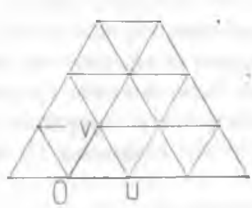
A cellák a síknak egybevágó hatszög-parkettázását adják. (3)-ban szép bizonyítását találjuk annak, hogy a sík konvex parkettázásának oldalszáma nem lehet nagyobb 6-nál. Adott területű n-szögek között a szabályosnak van legkisebb kerülete. *11: Fogalmazzuk meg, milyen szélsőérték feladatot oldottak meg a méhek a lép fölépítésével (a számukra végtelennek tűnő keretben)?* Ha már itt tartunk, válaszoljunk a kérdésre: *12: mely szabályos n-szögek egybevágó példányaival parkettázható ki a sík?* Érdemes már most megismerkedni a szabályos háromszögráccsal (5.ábra); $|u| = |v|$ és szögük 60°. Nevezzük *illesztés*nek ha két egybevágó háromszög teljes oldal mentén csatlakozik egymáshoz. Négy szabályos háromszögnek csak 3 különböző alakú illesztése van. *13: Hány illesztése van 5, illetve 6 szabályos háromszögnek?* Hasonló szórakoztató kérdés: *14: Hányféle konvex sokszög rakható össze szabályos háromszögekből, illesztéssel, ha különbözőnek csak azokat tekintjük, amelyek 60°-os és 120°-os szögeinek száma különböző?* Mindkét feladat a szabályos háromszögrácsban kijelölendő alakzatokról szól.

Vizsgáljunk meg néhány olyan kérdést, amelyek köré a rácsgeometria egyes ágai fejlődtek ki, elsősorban magasabb dimenzióban bonyolultak.

1.) A *legnagyobb üres kör* kérdése: *15: Γ rácshoz határozzuk meg azon legnagyobb kört, amely nem tartalmaz rácspontot.*

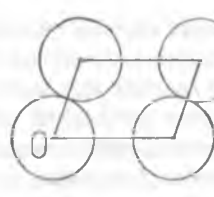


4. ábra

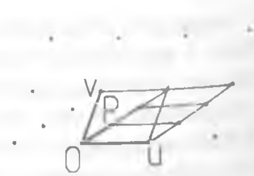


5. ábra

2.) *Rácsszerű elhelyezések*: ha minden rácspontba egybevágó alakzatot teszünk, és ezek éppen egymás eltoltjai, akkor az alakzat rácsszerű elhelyezéséről beszélünk. Ha például olyan köröket rajzolunk a pontok köré, melyek sugara a legrövidebb rácsvektor fele; (6. ábra), akkor a körök nem metszik egymást és *kitöltés*ről beszélünk. Egy kitöltés sűrűségét azzal a számmal jellemezhetjük, amely megmutatja, hogy az alakzatok összessége a síkot milyen arányban takarja le. Esetünkben ez éppen egy kör és egy paralelogramma területének aránya. Érdekes a legnagyobb sűrűséget adó kitöltés, ezt a szabályos háromszögrács adja. *Lefedés* az olyan elhelyezés, amelyben az alakzatok a sík minden pontját legalább egyszeresen takarják. Ennek sűrűsége a paralelogramma és a lefedő alakzat (pl. kör) területének hányadosa. Kör esetén a legtakarékosabb, azaz legritkább fe-



6. ábra



7. ábra

dést szintén a szabályos háromszögrács adja. Rajzoljuk le a két nevezetes esetet!

3.) *Sűrítés.* Az **u**, **v** bázisú Γ rácshoz vegyük hozzá a $\mathbf{p}=\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}v$ pontot, tehát az átló harmadát, (7. ábra). Tudunk olyan rácsot fölvenni (például u, p) amely az eredeti rácsot, és annak p-vel eltoltját is tartalmazó rácsot ad. Ez utóbbit a Γ sűrítésének nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy *16: Egy **u**, **v** bázisú rács akkor és csak akkor sűríthető egy P pontnak megfelelően, ha P **u**, **v**-re vonatkozó koordinátái racionálisak. 17: Egy 2 vagy 3 dimenziós rács sűrítésénél a* Γ_p *rács legrövidebb vektora kisebb lesz, mint a sűrítendő Γ bázisának legnagyobb vektora.* Térjünk vissza a testközéppontjával sűrített négydimenziós kockarácshoz. Gondoljuk meg, hogy itt az eredeti, valamint a sűrített rácsban is éppen a kocka éle a legrövidebb rácsvektor, tehát a minimum itt már nem csökkent! Az ilyen sűrítéseknek jelentős irodalma van, a dimenzióban fölfelé haladva ez az eset a legelső. *18: Keressünk más ilyen 5-6 dimenziós kockasűrítést!*

4.) *Kvadratikus formák.* A Γ rács egy **u**, **v** bázisában adott $\mathbf{p}=x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}$ rácsvektor hosszának négyzete $\mathbf{p}^2=(x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v})^2=\mathbf{u}^2x_1^2+2\mathbf{uv}x_1x_2+\mathbf{v}^2x^2=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$, ahol a_{ik} a megfelelő skaláris szorzatot jelöli. Ebben a kifejezésben az a_{ik} együtthatók ismertek és bármely x_1,x_2 egész változókra a megfelelő vektor hosszának négyzetét adja. Ha csak a $\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}x_ix_k$ *kvadratikus formát* ismerjük, akkor az a_{11}-ből és az a_{22}-ből gyökvonással megkapjuk az **u** és **v** hosszát és $a_{12}=\mathbf{uv}$ ($\mathbf{uv}=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})$) alapján a szögüket, tehát a forma és a bázis között van megfeleltetés. Várható, hogy egy tetszőlegesen fölírt kvadratikus formához még az $a_{ik}=a_{ki}$ teljesülése mellett sem fog föltétlenül bázis, tehát rács tartozni. Az azonos rács más-más bázisaihoz tartozó formák között kell legyen valami kapcsolat. Ha a formához R^3-ban az $F(x,y,z)=(a_{11},a_{12},a_{12})$ pontot rendeljük, akkor az "együtthatók terében" vizsgálhatunk bizonyos forma, tehát rácstulajdonságokat. Ezek a kérdések már messzebbre vezetnek.

Válaszok

1. Igen, például (u,1). 2: lnko (a-c, b-d)=1·3: Igen. 4. ha az **u**-val bezárt szögének tangense racionális. 5: Szokásos indirekt okoskodással. 6: Ellenkező esetben az origó körüli |**u**| sugarú körben végtelen sok rácspont lenne. Ha az alapparalelogramma területe T_0 és nagyobb átlója l hosszú, akkor az |**u**|+l sugarú körben végtelen sok T terület lenne. 7: Legyen |**u**| minimális, a vele bázist alkotó vektorok a ± első rácsrétegben vannak. Igazoljuk, hogy a második legrövidebb **v** vektor nem lehet távolibb rétegben. 8: az origó körüli körön vannak, azért ±6. 9: A Q-ba fölvett ±**u**, ±**v** vektorok felezőmerőlegesei egy paralelogrammát adnak. Ennek nagyobik átlója l. A Q körüli l sugarú körön kívüli rácspontok már nem adhatnak cellaoldalt. 10: Ha **u** és **v** merőlegesek. 11: A sík adott területű egybevágó n-szögekkel való legtakarékosabb - azaz legrövidebb falhosszúságú - kirakása. 12: n=3,4,6. 13: 4 illetve 12. 14: 6 féle 15: Legyen **u** a legrövidebb, **v** az **u**-val nem párhuzamos legrövidebb vektor, továbbá szögük nem nagyobb 90°-nál. A háromszögük körülírható köre. 16: Előbb egyenesrácsra bizonyítsuk be! 17: Az **u** és **v** paralelogrammájának bármely P pontja közelebb van egy csúcsához, mint az oldalak nagyobbika. Ezt beláthatjuk, ha P-t a legközelebbi oldalra vetítjük, majd azon a közelebbi csúccsal összekötjük. 18: Az ötdimenziós kocka sűríthető a középpontjával. Ugyancsak sűríthető egy négydimenziós kockalapja, de kettő már nem, mert az új pontok túl közel lennének. A hatdimenziós

sűríthető a középpontjával, egy ötdimenziós lapkockája, vagy egy illetve kettő (jól választott) négydimenziós lapja.

IRODALOM

(1) Reiman István: *A geometria és határterületei,* Gondolat, Budapest, 1986.
(2) M.C. Escher: *Art and Science,* Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1986.
(3) Skljarszkij-Csencov-Jaglom: *Válogatott feladatok,* III. kötet 83. feladat. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.