Miért nem lehet?

Feladatok szakköre

RÓKA SÁNDOR

"Ha a teknősbékát arra kényszerítjük, hogy úgy fusson, mint a versenyló - belepusztul. És ha a versenylónak nem engedjük meg, hogy gyorsabban haladjon, mint a teknős - ebbe a versenyló pusztul bele." Selye János

Érdekes és izgalmas feladat tehetséges, érdeklődő diákokkal együtt dolgozni. Megismerésükön kívül ez máshol meg nem szerezhető élményeket és tapasztalatokat nyújt: figyelni ötleteikre, próbálkozásaikat irányítani, s időnként meggyőződni arról, hogy ők az ügyesebbek, ők fedezik fel az összefüggéseket és a megoldás útját. A mi lehetőségeink a feladatmegoldási technikák átadásában, és a problémamegoldó készség fejlesztésében vannak. Ehhez adhat segítséget a következő feladatsor, amely a megszűnt Matematika Tanítása módszertani folyóiratban megjelent sorozat folytatása.

Feladatok

1. Miért nem lehet megadni 100 különböző páratlan egész számot úgy, hogy azok reciprokainak összege 1 legyen?

2. Összeadtunk három egymást követő egész számot, és összeadjuk a következő három számot is. Miért nem lehet az így kapott két szám szorzata 111 111 111 ?

3. Miért nem lehet a $(12n+1)/(30n+2)$ törtet egyetlen n természetes szám esetén sem egyszerűsíteni?

4. Miért nem lehet x^2+y és y^2+x egyszerre négyzetszám, ahol x és y pozitív egészek?

5. Miért nem lehet 1989 egész szám szorzata 1989, összege nulla?

6. Miért nem lehet 1990 egész szám szorzata 1990, összege nulla?

7. A 11 111, 11 112, ..., 99 999 számokat valamilyen sorrendben egymás után írtuk. Miért nem lehet az így kapott szám 2-hatvány?

8. Miért nem lehet egy pozitív egészekből álló végtelen számtani sorozatban pontosan egy négyzetszám (köbszám, stb.)?

9. Miért nem lesz egyetlen pozitív egész m esetén sem az $m(m+1)$ szám hatványszám?

10. Összeadjuk az $1/(m \cdot n)$ $\leq m < n \leq 1989$ alakú számokat. Miért nem lehet a kapott összeg egész szám?

11. Miért nem lehet a 111...1 (m db 1-es) szám valamely többszörösében a számjegyek összege m-től kisebb?

12. Miért nem teljesül valamely pozitív m,n számpárra az $(5+3\cdot\sqrt{2})^m=(3+5\cdot\sqrt{2})^n$ egyenlőség?

13. Miért nem osztja 1000^m-1 szám az 1988^m-1 számot egyetlen pozitív egész m-re sem?

14. Egy egész szám számjegyeit valamilyen más sorrendben újra leírtuk. Az így kapott számhoz hozzáadjuk az eredeti számot. Miért nem lehet az összeg 999...9 (1989 db 9-es)?

15. Az (m,n) számpárból megkaphatjuk az (m+n,n), vagy (m−n,n), vagy az (n,m) számpárt. Miért nem lehet ilyen műveletekkel a (19,89) számpárból a (12,21) számpárhoz eljutni?

16. Miért nem lehet 1989 két négyzetszám összege?

17. Miért nincs olyan egész szám, amely elé egy alkalmas számjegyet írva az eredeti szám 58-szorosát kapnánk?

18. Miért nem lehet az egész számok körében megoldani az $x^2-3y=17$ egyenletet?

19. Miért nem lehet az egész számok körében megoldani az $x^2+4x-8y=11$ egyenletet?

20. Miért nem lehet az egész számok körében megoldani a $3x^2-4y^2=13$ egyenletet?

21. Miért nem lehet megoldani az egész számok körében az $x^2-y^2=10101010$ egyenletet?

22. Miért nem lehet az egész számok körében megoldani az $x^4-2x^2y+3y^2+2=0$ egyenletet?

23. Miért nem lehet a pozitív egészek körében megoldani az $5^n+11^n=12^n$ egyenletet?

24. Miért nem lehet az $ax^2+bx+c=0$ egyenletet a racionális számok halmazán megoldani, ha a, b és c páratlan egész számok?

25. Az f(x) egész együtthatós polinomra teljesül, hogy $f(19)\cdot f(88)=5$. Miért nem lehet olyan k egész számot találni, melyre $f(k)=1988$ lenne?

26. Legyen $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, ahol g(x) és h(x) egész együtthatós polinomok. Miért nem lehet f(x) értéke végtelen sok egész x-re prímszám?

27. Miért nem lehet a $P(x,y)=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$ kétváltozós polinomot polinomok négyzetösszegeként felírni?

28. Miért nem lehet $\log_2 5$ racionális szám?

29. Miért nem lehet tg 5° racionális szám?

30. Miért nem lehet sin 5° racionális szám?

31. Miért nem lehet téglatestet páronként különböző méretű kockákból kirakni?

32. Miért nem lehet a koordinátarendszerben megadni olyan konvex négyszöget, melynek egyik átlója kétszerese a másiknak, az átlók 45°-os szöget zárnak be, és a csúcsok koordinátái egész számok?

33. Miért nem lehet kockát 4 db háromszögalapú gúlára (tetraéderre) felbontani?

34. Adott 5 szakasz, melyek közül bármely háromból szerkeszthető háromszög. Miért nem lehet ezen háromszögek mindegyike tompaszögű?

35. Miért nem lehet az $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{32}$, $-a_{13}a_{22}a_{31}$, $-a_{12}a_{23}a_{31}$, $-a_{11}a_{21}a_{33}$ számok mindegyike pozitív, ha az a_{ij} számok nullától különbözőek?

36. Miért nem lehet egy 10x10-es táblázatot úgy kitölteni, hogy a számok összege minden sorban pozitív, és minden oszlopban negatív legyen?

37. Miért nem metszhet egy egyenes egy 20x30-as táblázatot 50 mezőben?

38. Miért nem lehet egy kocka élein az 1,2,3,...,12 számokat úgy elhelyezni, hogy minden csúcsra az oda befutó éleken levő számok összege ugyanannyi legyen?

39. Miért nem lehet egy szabályos nyolcszög csúcsaiba az 1,2,3,...,8 számokat úgy elhelyezni, hogy bármely három szomszédos csúcsra az ott levő számok összege 13-tól nagyobb legyen?

40. Miért nem lehet egy szabályos hétszög éleit (oldalait és átlóit) hat színnel úgy színezni, hogy minden csúcsból mind a hatféle színnel induljon él?

41. Miért nem lehet egy szabályos 45-szög csúcsaiba a 0,1,2,...,9 számjegyeket úgy beírni, hogy ezekből bármely számpár szerepeljen valamely oldalél két végpontján?

42. Szabályos 12-szög egyik csúcsában mínusz jel, többiben plusz jel áll. Egy-egy alkalommal hat szomszédos csúcsban változtathatjuk meg az előjeleket. Miért nem lehet elérni, hogy néhány ilyen művelet után a mínusz jel egy szomszédos csúcsba "költözzön át", a többi csúcsban pedig plusz jel álljon?

43. Egy kör alakú asztalnál 77-en ülnek. Mindenki gondol egy egész számra, s mindenki felírja egy papirosra két szomszédja számainak összegét. Miért nem állhat mindegyik papiroson 1989?

44. Miért nem lehet egy 10x10-es sakktáblát 4x1-es dominókkal hézagmentesen és átfedés nélkül lefedni?

45. Egy 8x8-as sakktábla bal alsó mezőjét kivágtuk. Miért nem lehet a jobb felső mezőről indulva egy huszár bábuval úgy bejárni ezt a sakktáblát, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintsünk?

46. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3,..., 1990 számokat. Egy-egy alkalommal két számot letörölhetünk, de helyette azok összegét vagy különbségét felírjuk. Ezt az eljárást sokszor megismételve, végül egy szám marad a táblán. Miért nem lehet ez a szám nulla?

47. Egy szigeten 13 szürke, 15 barna, 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijednek egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják a bőrüket. Két azonos színű kaméleon nem ijed meg egymástól, így találkozáskor nem változtatják meg a színüket. Miért nem lehet egy idő múlva minden kaméleon ugyanolyan színű?

48. Egy négyzet csúcsaiba gyufákat helyeztünk. Egy-egy alkalommal bármelyik csúcsból vehetünk el gyufákat, de az egyik ezzel szomszédos csúcsba kétszer annyi gyufaszálat kell elhelyezni. Kezdéskor a csúcsokban valamilyen körüljárást tekintve, a gyufák száma: 1, 0, 0, 0. Miért nem lehet elérni azt hogy egy idő múlva a csúcsokban levő gyufák száma: 1, 9, 8, 9 legyen?

49. Egy kocka csúcsaiba számokat írtunk. Egy-egy alkalommal valamelyik él két végén álló számot eggyel-eggyel növelhetjük. Miért nem lehet elérni ezen művelet többszöri alkalmazásával, hogy minden csúcsban ugyanaz a szám álljon, ha a kezdőállapot:

a) egyik csúcsban 1-es, többiben 0?

b) egyik oldallap két szemközti csúcsában 1-es, többiben 0?

50. Adott egy négyzet három csúcsa, s most a következő művelet engedélyezett: meglévő pontot másik pontra tükrözhetünk. Miért nem lehet ennek a műveletnek többszöri alkalmazásával a hiányzó negyedik csúcsot előállítani?

Útmutatások a feladatok megoldásához

1. Ha a törteket közös nevezőre hozzuk, a számláló páros, a nevező páratlan szám lesz, s ezért ez a tört nem lehet 1-gyel egyenlő.

2. Az egyik szorzótényező páros szám.

3. Ha a számlálónak és a nevezőnek van közös osztója, az osztója az $5\cdot(12n+1) - 2\cdot(30n+2) = 1$ számnak is.

4. Ha $y \leq x$, akkor $x^2 < y^2 + y \leq x^2 + x < (x+1)^2$

5. A szorzatot figyelve: az 1989 db szám mindegyike páratlan, így ezek összege is páratlan lesz.

6. A szorzatot figyelve: az 1990 db szám között van egy páros, és van 1989 db páratlan. Ezek összege páratlan.

7. A felírt szám osztható lesz 11 111-gyel, így nem lehet 2-hatvány. Az oszthatóság oka: $100\,000 = 9\cdot 11\,111 + 1$, ezért a felírt szám ugyanannyi maradékot ad 11 111-gyel osztva, mint a kártyákon levő számok összege, $(10^5-1)\cdot(11\,111 + 99\,999)/2$ ez pedig maradék nélkül osztható 11 111-gyel.

8. Legyen a sorozat differenciálja d, egyik tagja $a=m^2$! Ekkor $(m+kd)^2 = m^2+2mkd + +k^2d^2 = a + d(2km + k^2)$ szintén eleme a sorozatnak. Hasonló a bizonyítás köbszámra, s más hatványokra is.

9. m és m+1 relatív prímek, így szorzatuk csak akkor n-edik hatvány, ha mindkét tényező n-edik hatvány.

10. 1-től 1989-ig csak két szám van, mely osztható 3^6-nal: $729=3^6$ és $1458=2\cdot 3^6$. Az 1/m·n törtek közül így csak egynek a nevezője osztható 3^{12}-nel. Ha a feladatban mondott összeget közös nevezőre hozzuk, a nevező osztható lesz 3^{12}-nel, a számláló pedig 3-mal osztva nem nulla maradékot ad.

11. Tegyük fel, hogy az A r-jegyű szám a legkisebb a 111...1 többszörösei közül, melyben a számjegyek összege m-től kisebb. Nyilván $r \geq m$, és 10^r-10^{r-m} osztható 111...1-gyel (m db 1-es). Ekkor az $A-(10^r-10^{r-m})$ szám szintén többszöröse 111...1-nek, jegyei összege kisebb lesz m-től, és – ami ellentmond a feltevésnek – ez a szám kisebb A-tól.

12. Ha $(5 + 3\cdot\sqrt{2})^m = (3 + 5 \cdot \sqrt{2})^n$, akkor $(5 - 3\cdot\sqrt{2})^m = (3 - 5\cdot\sqrt{2})^n$, s ez utóbbi nem lehet, mert az egyenlőség bal oldalán egy 1-től kisebb pozitív számot, a jobb oldalon pedig egy 1-től nagyobb abszolutértékű számot hatványozunk.

13. Ha 1988^m-1 osztható $1000^m-1 = d$-vel, $\Rightarrow$ a két szám különbsége $(1988^m-1) - -(1000^m-1) = 2^m\cdot(994^m-500^m)$ is osztható a d számmal, azaz 994^m-500^m osztható lenne d-vel, ami azért nem lehet, mert ez a pozitív szám kisebb d-től.

14. Jelölje az eredeti számot A, a számjegyek felcserélésével kapott számot B. A-ban is, B-ben is a számjegyek összege ugyanannyi, jelölje ezt k. A 999...9 szám jegyeinek összege megegyezik az A és a B számok számjegyeinek összegével, hiszen a 999...9=A+B összeadásban egyik helyértéken sem történhet tízes átvitel. Tehát $1989\cdot 9 = k + k$, ami nem lehet, hiszen a bal oldalon páratlan szám áll.

15. Ha egy számpáron egymás után többször végrehajtjuk a megadott műveleteket, a kapott számpárok mindegyikének lesz egy közös tulajdonsága: ugyanaz a legnagyobb közös osztójuk.

16. Négyzetszám 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adhat, ezért két négyzetszám összege 4-gyel osztva 3 maradékot nem ad.

17. Írjuk az A elé az a számjegyet. A feladat szerint: $a\cdot 10^n+A = 58\cdot A$, azaz $a\cdot 10^n = =57\cdot A = 3\cdot 19\cdot A$, s ez nem lehet, mert a bal oldal nem osztható 19-cel.

18. Négyzetszám 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad, az egyenlőség bal oldalán is 0 vagy 1 maradékot kapunk, ha azt 3-mal osztjuk, míg a jobb oldalon 2 a maradék.

19. Hasonló az előző feladathoz, csak most a 4-gyel való osztási maradékot érdemes figyelni.

20. Olyan, mint az előző két feladat, figyelhetjük akár a 3-mal, akár a 4-gyel való osztáskor keletkező maradékokat.

21. A bal oldal 4-gyel osztva 0,1 és 3 maradékokat adhat, míg a jobb oldalon 2 a maradék.

22. $x^4-2x^2y+3y^2+2 = (x^2-y)^2 + 2y^2 + 2$, s ez nem lehet nulla.

23. 12^n-5^n osztható $12-5=7$-tel, míg 11^n 7-tel nem osztható.

24. Legyen $x = p/q$ gyöke az egyenletnek, és $(p,q)=1$. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát – az $x=p/q$ helyettesítés után – q^2-tel. Az $a\cdot p^2 + b\cdot p\cdot q + c\cdot q^2 = 0$ egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha az összeadandók közt van páros szám. Azonban, ha p vagy q közül az egyik páros, akkor az egyenlőség miatt a másik is páros, s ez ellentmond a $(p,q)=1$ feltételnek.

25. Látható, hogy f(19) és f(88) is páratlan. Ha egy egész együtthatós polinom egy páros helyettesítési értékre páratlan értéket vesz fel, akkor minden páros számra páratlan lesz az értéke. Ugyanez igaz, ha a páratlan helyettesítési értékeket figyeljük. Ezért f(x) értéke minden egész helyen páratlan szám.

26. Ha f(x) értéke végtelen sok egész x-re prím, akkor g(x) vagy h(x) értéke végtelen sokszor az 1 vagy −1 szám. Vegyük például azt, hogy g(x) értéke végtelen sokszor 1, ekkor g(x)−1 polinomnak végtelen sok gyöke volna, ami nem lehet.

27. Legyen $P(x,y) = g_1^2(x,y) + g_2^2(x,y) + ... + g_n^2(x,y)$, ahol $g_i(x,y)$ polinomot jelöl. Mivel P(x,0)=P(0,y)=4, így $g_i(x,y)$ nem tartalmazhat $a \cdot x^k$ vagy $b \cdot y^m$ tagot, ezért $x^2 \cdot y^2$ együtthatója a jobb oldalon nem lehet negatív.

28. Ha $\log_2 5 = p/q$, akkor $2(p/q) = 5$, azaz $2^p=5^q$, s ez nem lehet, mert a bal oldal osztható 2-vel, a jobb oldal nem.

29. Ha tg 5° racionális, akkor a tg 2x -re vonatkozó összefüggést használva tg 10° és tg 20° értékére is racionális szám adódik, valamint a tg(x+y) addíciós összefüggés alapján tg (10°+20°)=tg 30°-ra is racionális értéket kapunk, azonban annak értéke $\sqrt{3}/3$ ami irracionális.

30. Ha sin 5° racionális, akkor a $\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$ összefüggés sin 15° értékére racionális számot ad, azonban sin 15° értéke irracionális: $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = (\sqrt{2}/4) \cdot (\sqrt{3} - 1)$.

31. Válasszuk ki a kockák közül a legkisebbet. Az ezzel szomszédos kockák mindegyike nem lehet tőle nagyobb. Ellentmondás.

32. Ennek a négyszögnek a területe racionális szám. Ha a négyszög területét az $(e \cdot f \cdot \sin\alpha)/2$ (e és f a két átló, α az általuk bezárt szög) képlettel számoljuk, $(\overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \sqrt{2})/4 = \overline{AC}^2 \cdot (\sqrt{2}/2)$ értéket kapunk, ami irracionális, hiszen $\overline{AC}^2$ egész szám, (számoljuk ez utóbbi értéket a Pitagorasz-tétellel). Ellentmondás.

33. Válasszuk ki a kocka két szemközti oldallapját! Egy-egy ilyen lapon legalább két tetraéder oldallapja nyugszik. Ez már legalább négy tetraéder, s ezekből egyet sem számolhattunk kétszer. A négy tetraéder térfogatának összege legfeljebb $2/3 \cdot a^3$ (a kocka éle). Látható, hogy négy tetraéder valóban kevés a felbontáshoz, azonban öttel már megvalósítható a felbontás.

34. Legyen $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ az öt szakasz. Ha a szerkeszthető háromszögek egyike sem hegyesszögű, akkor $c^2 \geq a^2+b^2$, $d^2 \geq c^2+b^2$, $e^2 \geq d^2+c^2$, melyekből az $e^2 \geq a^2+2b^2+c^2 \geq a^2+2ab+b^2$ egyenlőtlenség nyerhető, azaz $e \geq a+b$, ami a háromszög-egyenlőtlenségnek mond ellent.

35. Ha mind a hat szám pozitív, akkor szorzatuk is az, azonban ez $-(a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33})^2$.

36. Adjuk össze a táblázatban levő számokat egyszer soronként, egyszer oszloponként. Egyik alkalommal ez az érték pozitív, másik alkalommal negatív szám.

37. Ha egy egyenes 50 mezőt metsz, akkor metsz 49 rácsegyenest is (mikor az 1. mezőből a 2. mezőbe, a 2. mezőből a 3. mezőbe, ... , a 49. mezőből az 50. mezőbe ér). Azonban a rácsegyenesek száma: 19 vízszintes és 29 függőleges, összesen 48 egyenes (a határoló egyeneseket nem kell számolnunk).

38. Írjuk fel a csúcsokba az oda befutó éleken levő számok összegét, majd adjuk össze a csúcsokban levő számokat. A kapott összeg: 2•(1+2+3...+12) = 12•13, s ezt nem lehet nyolc egyenlő részre osztani úgy, hogy a kapott szám egész szám legyen.

39. Számítsuk ki az összes szomszédos három csúcsra az ott álló számok összegét, majd ezeket adjuk össze. A kapott összeg: 3 • (1+2+3+...+8)=108. Ha bármely három szomszédos csúcsra az ott álló számok összege nagyobb 13-tól, akkor ezen összegek összege legalább 8•14=112 lenne. Ellentmondás.

40. Ha lehetne, akkor minden csúcsba pontosan 1 piros színű él futna be, ez 7 csúcs esetén nem valósítható meg, mert vagy lesz olyan csúcs, melybe nem fut piros

él, vagy pedig lesz olyan csúcs, melybe két piros él is fut.

41. Összesen 45 számpár képezhető, ezért minden számpár pontosan egyszer szerepelhet. Tekintsük a 0 számot, ez 9 számmal alkot párt. Ha a 0-t elhelyezzük egy csúcsba, akkor ott két számpár keletkezik (a bal oldali, és a jobb oldali szomszédjával). Mivel a 9 páratlan szám, ezért a kívánt elrendezés nem valósítható meg.

42. Állítsuk párba a szemközti csúcsokat. Egy-egy művelet minden egyes pár elemének előjelét változtatja meg. Ezt a műveletet páratlan sokszor elvégezve, a párba állított csúcsokban az előjelek különbözőek lesznek, míg a páros sokszor elvégezve, a párokban az előjelek azonosak lesznek (kivéve az (A_1, A_7) párost). Ezért nem lehet, hogy egyidejűleg az (A_2, A_8) párban különböző, az (A_3, A_9) párban azonos legyen a felírt előjel.

43. Adjuk össze a cédulákra felírt számokat, ez kétszerese a gondolt számok összegének, tehát páros szám, s ez nem lehet 77•1989.

44. Színezzük a 10x10-es táblát 4 színnel úgy, hogy a főátlóval párhuzamos átlókban egyszínűek a mezők, s a különböző színű átlók ugyanabban a sorrendben követik egymást. Ekkor bárhogyan is helyezünk el egy 4x1-es dominót, az minden színből egy-egy mezőt fed. Azonban, ha összeszámláljuk az azonos színű mezőket egy-egy színből, eltérő számokat kapunk.

45. A huszár felváltva lép fehér és fekete mezőkre.

46. Egy-egy törlés-felírás alkalmával a páratlan számok száma vagy változatlan, vagy kettővel csökken. A táblán eredetileg páratlan sok páratlan szám volt.

47. Jelölje a szürke, barna és zöld kaméleonok számát rendre: a, b és c. A színváltások alkalmával az a−b érték 3-mal való osztási maradéka nem változik. Ez az osztási maradék a feladatban szereplő (13, 15, 17) számhármasra 1, míg a kívánt egy színű csoportra, pl. a (45, 0, 0) számhármasra 0.

48. Jelölje a négyzet csúcsaiban levő gyufák számát valamilyen körüljárást tekintve: a, b, c, d. Egy-egy művelet alkalmával az a−b+c−d szám 3-mal vett osztási maradéka nem változik. Ez a maradék a kezdő állapotban 1, s az elérni kívánt helyzetben 0.

49. *a)* Ha összeadjuk a csúcsokban levő számokat, az összeg párossága a műveletek során nem változik, hiszen mindig 2-vel nő. Ha az összes csúcsban ugyanaz a szám áll, akkor ez az összeg páros, míg a kezdő állapotot tekintve, ott az összeg páratlan.

b) Osszuk két csoportba a 8 csúcsot úgy, hogy az ugyanabban a csoportban levő négy csúcs közt ne legyen kettő, mely ugyanazon él két végpontja (ez a felosztás egy-egy szabályos tetraéder csúcsait adja meg). Számítsuk ki a két csoportban levő számok összegét. Ez a két összeg a műveletek során mindig egyszerre nő 1-gyel. A kívánt állapotban a két összegnek egyenlőnek kell lennie, míg a kezdő állapotban különböznek.

50. Vegyük fel a koordinátarendszerben a négyzet három csúcsát: (0, 1), (1, 1), (1,0). Egy tükrözés során a tükrözött pont egy-egy koordinátája vagy változatlanul marad, vagy páros számmal változik. Mivel a megadott pontok mindegyikének van páratlan szám az első vagy a második koordinátájában, ezért az előállítható pontok is tartalmaznak páratlan számot koordinátaként. A keresett negyedik csúcs (0, 0).