A vektorfogalom kialakítása

FATALIN LÁSZLÓNÉ

Egy témakör tanítása előtt alapvetően fontos a benne szereplő fogalmak, módszerek fejlődéstörténetét áttekinteni, hiszen ezen elemzések birtokában lehet csak olyan hatékonyabb oktatási módszereket találni, melyek alkalmazásakor az ismeretek nem válnak formálissá vagy hamissá.

A vektorfogalom kialakításának problematikájával számos cikk foglalkozott, oktatásához sok értékes észrevétel, javaslat született, melyek nagy részét a tantárgyi reformok során nem vették figyelembe. A cikkek elsősorban három kérdéskört vizsgáltak: a geometriai vektor és az irányított szakasz kapcsolatát; a vektortér axiomatikus tanítását; a fizikai vektormennyiségek és a matematikai vektor kapcsolatát.

A vektorfogalom történeti kialakulásának vázlatos áttekintése után e három kérdéskör kerül ismertetésre.

A vektor fogalmának történeti kialakulása

A vektorfogalom megalkotását a fizika tette szükségessé. A vektorok elméletének legegyszerűbb része, a vektoralgebra is viszonylag későn, alig másfél évszázada alakult ki. Ez meglepőnek tűnhet, ha arra gondolunk, hogy már a klasszikus fizikában számos iránytól függő mennyiség szerepelt, de a vektorfogalomban a műveleti tulajdonságok játsszák a döntő szerepet. Az irányított fizikai mennyiségeket eleinte nem tekintették vektornak, csak ha a *paralelogramma szabály* szerint volt összegezhető. A második fázisban a vektor kritériuma az lett, hogy *vektorként transzformálódik*. Ez az elképzelés olyan mélyen meggyökerezett a matematikában is, hogy még az 1960-as években is jelentek meg magas színvonalú matematika könyvek, melyek ezt a felfogást tükrözik. A harmadik, jelenlegi szakaszban vektor kifejezésen mindig egy adott struktúrájú halmaz elemét értjük. A vektorfogalom megalkotásában tehát nem az irányított mennyiség fogalma, hanem a műveletek játszották a döntő szerepet. A vektorelmélet fejlődése megismételte a matematika fejlődési fázisait és hosszú ideig megtartotta szoros kapcsolatát a fizikával. Ezt bizonyítja a következő vázlat:

1. vektoralgebra: *Grassman (1809–1877)* német gimnáziumi tanár; színelmélet, többdimenziós geometriák

Hamilton (1805–1865) angol csillagász; mechanika, optika, kvaterniók elmélete

2. vektoranalízis: *Gibbs (1839–1903)* amerikai fizikus

Heaviside (1850–1925) angol elektromérnök

3. vektorstruktúrák axiomatikus felépítése.

A vektorfogalom tudományos alkalmazásait áttekinteni napjainkban igen nehéz feladat lenne. Mivel a több komponenst tartalmazó fogalmaknak igen jó matematikai modellje, szinte minden területen széles körben használják.

A geometriai vektor tanításának logikai problémája

Jóval több mint egy évszázadnak kellett eltelnie, míg a vektor kifejezés megjelent a középfokú oktatásban. E késedelem nemcsak alkalmazási fontossága miatt sajnálatos, hanem azért is, mert e fogalom elég szemléletes ahhoz, hogy az absztrakt gondolkodáshoz, fogalomalkotáshoz szükséges különböző szinteken fokozatosan végig lehessen haladni. A jelenlegi tananyagban a vektor fogalma lényegében egybeesik az irányított szakasz fogalmával. A geometria vektor fogalmának a javaslatok szerint a következő definíciói lehetségesek.

1. definíció: *Az irányított szakaszokat vektornak nevezzük* (tankönyv).

Ezzel az egyszerű elemi fogalomalkotással az a baj, hogy matematikai szempontból nem vektorteret eredményez, pontosabban n-dimenziós lineáris geometria esetén ez 2n-dimenziós vektortérként értelmezhető, de nem ezt akarjuk definiálni.

2. definíció: *Geometriai vektornak nevezzük az irányított szakaszokat és két vektor egyenlő, ha nagyságuk és irányuk megegyezik.*

Ez a definíció jó, az egyenlőség fogalmát formális logikai fogalomnak tekinti, ami teljesen korrekt, hiszen a definícióban szereplő tulajdonság az euklideszi geometriában értelmezett. Problémát jelent azonban, hogy formális, esetleg intuitív vektorfogalmat eredményez.

3. definíció: *Geometriai vektornak nevezzük a megegyező irányú és egyenlő hosszúságú szakaszok halmazát (ekvivalencia-osztályát).*

E definíció előnye, hogy az egyenlőség fogalmával kapcsolatos problémák konkrét formában tisztázódnak előkészítve egyben további tárgyalását is, de a vektor így halmaz (ekvivalenciaosztály), az irányított szakasz a vektornak eleme, reprezentánsa. A műveletek definiálásánál igazolni kell azok reprezentánstól való függetlenségét. Érezhetően elég bonyolult fogalmat eredményez.

4. definíció: *Geometriai vektornak nevezzük az eltolásokat.*

Fogalmilag egyszerű, hiszen az egyenlőség problematikája automatikusan megoldódik, de így a geometriai vektor transzformációként van értelmezve és a skalárral való szorzás nehezen értelmezhető.

Az elmondottak alapján a következő két alternatíva alakult ki:

– az 1. definíció, megemlítve a két vektor egyenlőségét, azaz formálisan tisztázva a geometria vektor fogalmát. Jelenleg ez szerepel általában a tananyagban;

– a 3. definíció, mely alkalmazását az eltolások bevonása megkönnyíti. Ez bonyolultabb, de tisztességes geometriai vektorfogalmat ad és értékes részeredmény az egyenlőség, az ekvivalenciareláció újabb konkrét alkalmazása is. Vázlata a következő:

1. Egy eltolást egy irányított szakasszal lehet megadni.

2. Két irányított szakasz mikor adja meg ugyanazt az eltolást?

3. Az irányított szakaszok "skatulyába dobálhatók" úgy, hogy mindegyik skatulyát kétféle azonosító címke is jellemez (irányuk és nagyságuk egyenlő, ugyanazt az eltolást határozzák meg).

4. Az így keletkezett skatulyák, halmazok a geometriai vektorok.

5. A műveletek reprezentánstól való függetlenségét nem kell igazolni.

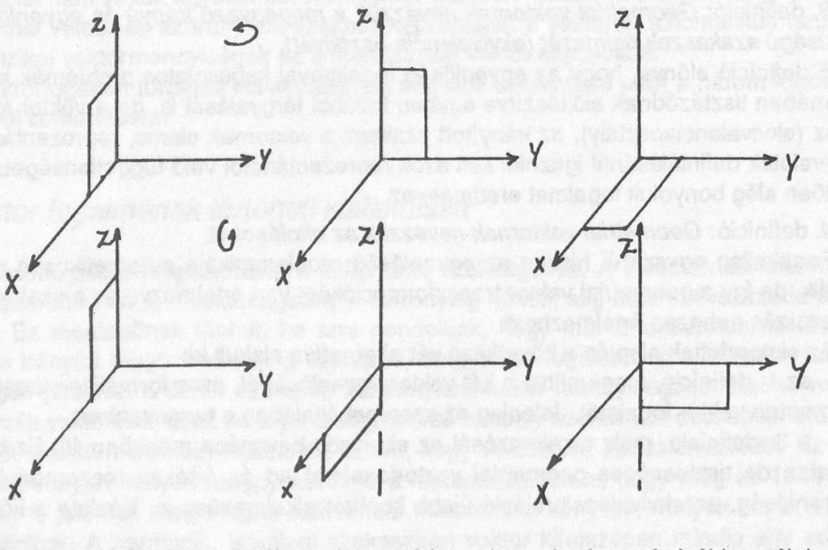
A geometriai vektor és a fizikai mennyiségek

A vektorfogalom meghatározásához nincs szükség a távolság fogalmára. Az affinsíkban az irányított szakaszok osztályába sorolhatók a következő ekvivalenciarelációval AB ~ CD, ha AC || BD és AB || CD. Így lehet eljutni a geometriai vektor legáltalánosabb fogalmához. A geometriai vektor és a fizikai vektormennyiségek közötti kapcsolatot számos probléma terheli.

a) A fizikai vektormennyiségeknek hogyan feleltethetők meg a vektorok? A válasz egyszerűnek tűnik, hiszen a tankönyv szavaival élve "az olyan fizikai mennyiségek, amelyek egyértelmű meghatározásához a nagyságot és az irányt is meg kell adni, vektormennyiségek", a matematika tankönyvben pedig "a vektor irányított szakasz", illetve pontosítva: "az azonos irányú és nagyságú szakaszok halmaza". A megfeleltetés nyilvánvaló, ez módot ad az ábrázolásra is. Itt elegendő csak két problémát kiemelni, amelyek onnan erednek, hogy a definícióból kimaradtak a műveleti tulajdonságok:

– az erő vektormennyiség akkor a p=F/A miatt a p nyomás is vektormennyiség lenne, de a folyadékoknál, gázoknál ez nem egészen világos; továbbá a gyorsulás vektormennyiség és F=ma, akkor miért kell a IV. axiómát, a szuperpozíció elvét kimondani?

– a merev test tengely körüli forgása jellemezhető a tengely irányával és az elfordulás szögével, azaz vektorral, de a vektorok összeadása kommutatív művelet és most tekintendő az XY síkban álló gyufásdoboz, melyet először a Z, majd az Y tengely körül 90°-kal elforgatva, majd a műveleteket fordított sorrendben elvégezve nem ugyanazt adják eredményül.



b) A geometriai vektor esetében nincs mód a vektor elcsúsztatásáról beszélni, a 2. és a 3. definíció alapján legfeljebb a reprezentáns kiemelésében van "választási jog", de az irányított szakasz eltolásával a vektor változatlan marad. A fizikai vektormennyiségek viszont hatásuktól függően háromfélék lehetnek. *Kötött vektor*, mely hatása megváltoztatása nélkül nem tolható el. *Részben szabadvektor*, amely csak a vektort tartalmazó egyenes mentén tolható el hatásának megváltoztatása nélkül. *Szabadvektor*, amelynek hatása nem változik meg az eltolás hatására. A fizikai vektormenynyiségek esetében kell eltolhatóságukról beszélni, a geometriai vektor esetén ennek nincs értelme. Ez az ellentmondás izomorf vektorterek segítségével feloldható ugyan, de tanításra alkalmatlan. (Vektorok eltolását a differenciálható sokaságokon értelmezett vektormezők körében szokták vizsgálni és a konnexióelmélet foglalkozik vele.)

A vektorok tanításának fejlesztésével kapcsolatos cikkek többsége szerint a vektor, mint irányított szakasz helytelen fogalmát helyettesíteni kellene a geometriai vektor fogalmának korrekt kiépítésével. Tekintettel a geometriai vektor fizikai alkalmazhatóságának nehézségére és e fogalom bonyolultságára, ami nem segíti elő az absztrakt vektorfogalom kiépítését, a geometriai vektorfogalmat célszerűbb kihagyni a középiskolai oktatásból! Tekintettel arra, hogy akár a gondolkodás fejlesztési, akár matematikai, vagy más szaktudományi szempontokat véve figyelembe rendkívül hasznos központi fogalomnak bizonyul a vektor, ezért feltétlenül szükséges lenne többet és gondosabban foglalkozni vele a középiskolai anyagban.

A vektortér axiomatikus felépítése

Joggal vetődik fel a kérdés, hogy a jelenlegi rossz módszer helyett hogyan lehetne tanítani a vektor fogalmát! A bevezetőben említett cikkek nagy része a vektor axiomatikus tanításával foglalkozik. Matematikai szempontból ez nagyon helyes, de számos pedagógiai problémát okoz. Ezen elképzelések szerint a középiskolai tananyagban hallgatólagosan sok vektortér szerepel:

- geometriai vektorok
- helyvektorok
- korlátos valós számsorozatok
- konvergens valós számsorozatok
- olyan számsorozatok, amelyekben valamely rögzített elemtől kezdve csupa nulla áll
- [a,b]-ben értelmezett valós, korlátos, integrálható, folytonos, deriválható függvények
- legfeljebb n-edfokú polinomok és azok azon alterei, amelyeknek adott szám-n-esek a gyökei.

E sok példa kapcsán lehetőség van e struktúrákban értelmezett műveletek közös tulajdonságait összefoglalni és ilyen módon megfogalmazhatók a vektortér axiómái, el lehet jutni a vektor axiomatikus fogalmához, azonban pedagógiai szempontból két alapvető problémát kell kiemelni:

- túlzottan későn alakulna ki e fogalom, így például a fizika lenne kénytelen a vektormennyiség fogalmát meghatározni, de hogyan?
- a felsorolt példák három kivételtől eltekintve, (ezek közül is egyet az elmondottak alapján célszerű kihagyni) végtelen dimenziós függvényterek. Ezek elég bonyolult fogalmak nem szolgálhatnak a tanulók absztrakciós tevékenysége alapjául. Amennyiben a vektorfogalom kialakítása során példaként a függvényterek szerepelnek, akkor éppen a vektor szemléletessége marad el, ami alkalmassá teszi az absztrakt gondolkodáshoz, fogalomalkotáshoz vezető út szerepének betöltésére.

E kétségkívül helyes matematikai eljárás során számos olyan pedagógiai probléma jelentkezik, amely kérdésessé teszi a végeredményt. Célszerűnek tűnik a szükséges szempontok összefoglalása, ami alapján kompromisszumos út talán könnyebben kialakítható.

A vektorfogalom kialakításának szempontjai

1. tézis. *Ismerkedéskor a vektornak szoros kapcsolatban kell állnia az irányított szakasszal!*

Erre a hagyományon és a fizikai szemponton kívül azért is szükség van, mert ez adja meg szemléltetésének, ábrázolásának lehetőségét.

2. tézis. *Az irányított szakaszok nem vektorteret alkotnak, hanem általában az adott tér tangensnyalábjaként értelmezhető ez a halmaz!*

Ez a két szempont első pillanatra ellentmond egymásnak. Ezt az ellentmondást lehet feloldani a geometriai vektorfogalommal, de ez zsákutcának bizonyult. Létezik azonban egyszerűbb, célszerűbb feloldás. Ez később kerül tárgyalásra.

3. tézis. *A vektorfogalom meghatározásakor feltétlenül szükséges a műveleteket már a definícióba is bevonni!*

4. tézis. *A vektorfogalom kialakításánál célszerű elősegíteni a vektor eltolhatóságának tárgyalását!*

5. tézis. *A vektort axiomatikusan definiáljuk!*

6. tézis. *Minél előbb alakuljon ki e fogalom!*

7. tézis. *A vektor axiomatikus meghatározása előtt sok, lehetőleg végesdimenziós, egyszerű objektumokat tartalmazó példa kerüljön tárgyalásra!*

E hét szempont között ellentmondások és kapcsolatok vannak. Alapvető probléma az 1., a 2., és a 4. szempont kapcsolata.

Az irányított szakasz, a tangensnyaláb és az eltolás

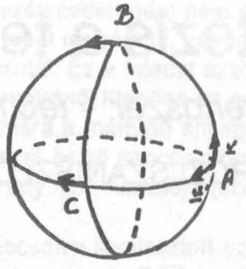
Az irányított szakaszok a tér minden pontjában vektorteret alkotnak. A tér összes pontjához tartozó vektorterek uniója a tangensnyaláb fogalmához vezet. Az összes irányított szakasz éppen ezt a struktúrát adja meg. Lineáris geometriák esetében az eltolások segítségével faktorizálható a halmaz, és így megkapható a geometriai vektor fogalma. Görbült terek esetén, mivel az eltolások nem vektorteret alkotnak, nem vektortér adódik eredményül, azaz a geometriai vektor nem értelmezhető és ez fordítva is igaz, a geometriai vektor fogalmával a görbült terekhez következetesen nem lehet eljutni. Az eltolások szerinti faktorizáció alkalmazása miatt a geometriai vektor eltolhatósága nem értelmezhető.

A másik út, ami az irányított szakaszoktól, azaz a tér tangensnyalábjától egy vektorfogalomhoz elvezet jóval egyszerűbb; az adott pontbeli tangenstér értelmezése, amely már vektortér. Egyszerűbben: egy adott pontból induló, irányított szakaszok vektorteret alkotnak, ezek az adott pontbeli tangensvektorok. Mivel a tér minden pontjában létezhetnek e vektorok, könnyen értelmezhető a vektorok eltolhatósága. Ez nagy segítséget nyújt a fizikának, például a vektormező fogalmának kiépítésével.

Az 1., a 2. és a 4. tézis alapján (amely összhangban van a 6. tézissel is), célszerű első lépésben bevezetni az adott pontbeli tangensvektor fogalmát. Az 5. szempont sem sérülne túlzottan, hiszen nem a vektor, hanem a tangensvektor kerül meghatározásra, erre tudatosan ügyelni kell. A 3. szempont miatt a műveleteket is szükséges szerepeltetni.

A vektor tanítására vonatkozó javaslat vázlata

Az eddig elmondottak alapján első lépésben a tangensvektor fogalma alakítható ki, majd példák megismerése után az absztrakt vektortéré. A tangensvektor fogalma egyszerű, eléggé általános ahhoz, hogy széleskörben felhasználható legyen. Alkalmas a vektormező fogalmának kiépítéséhez, ezért akár a fizikai mezők tárgyalásához, akár egy tér görbültségének érzékeltetéséhez is jó. Ez utóbbihoz érdemes átgondolni a következő példát. A gömbi geometriában az ábrán látható ABC háromszög mentén a *v* vektort eltolva a *w* vektor adódik eredményül, amely merőleges a *v* vektorra. Ilyen módon érzékeltethető egy tér görbültsége.



A vektortérre felsorolt példák megismerése után lehetőség van e struktúrákban értelmezett műveletek közös tulajdonságainak áttekintésére, az axiómák ezek összefoglalásaként fogalmazódnak meg. Érdekes, izgalmas kérdést jelent e tulajdonságok logikai következményeinek feltérése. Ilyen módon el lehet jutni a vektor axiomatikus fogalmához. Az utóbbi módszerhez számos műben hasznos észrevételek, részletesebb kifejtések találhatók.

A tangensvektor alkalmazása a fizikában

A differenciálgeometriában meghonosodott jelölést alkalmazva, azaz M az alapsokaság, TM a tangensnyalábja és T_pM a p pontbeli tangenstér. A vektormező ekkor a következő módon definiálható: az

$$Y : M \to TM$$
$$p \to Y(p) \in T_p M$$

leképezések vektormezők, azaz a tér minden p pontjában adott egy p pontbeli tangensvektor. Ezen fogalom alapján világosan meg lehet különböztetni a mező és a tér fogalmát. A vektormező lehetővé teszi, hogy a vektorokat ne kelljen osztályozni kötött, részben kötött és szabad vektorokra. Egy csigán átvetett kötelet húzva, miért görbül el az erő hatásvonala? A kérdésre lehet találni különböző válaszokat, de ez csak foltozgatása lesz a vektormennyiség meglevő hiányos fogalmának. Ilyen kérdések fel sem vetődnek a vektormező fogalmának felhasználásával, ami a tangensvektor segítségével könnyen bevezethető.

E dolgozatban szereplő problémák talán szőrszálhasogatásnak tűnnek, de a matematikában, és a fizikában igen fontos feladat a pontos egyszerű fogalomalkotás, különösen akkor, ha alapvető jelentőségű fogalomról van szó.