Bebizonyítható, hogy a lefogási probléma NP–teljes. *Ennek a fogalomnak ismertetése meghaladja ezen cikk keretét, csak azért említjük meg, mert a matematikusok számára az* NP–teljesség azt jelenti, hogy a probléma igen nehéz. *Például nem várjuk, hogy olyan megtanulható módszer legyen megoldásukra, mint a másodfokú egyenlet vagy lineáris egyenletrendszerek megoldására.*

A feladatok eredetéről. *Az 1. a* Kvant *című folyóiratban jelent meg. A 2. feladat és 4. feladat a* KÖMAL*-ból ered (1987/2, 79. old. F.2623., illetve 1978/1, 30. old., P.295.). A 3. feladat a Szovjet középiskolai matematikai olimpián volt kitűzve 1977-ben a 10. osztályosoknak.*

HAJNAL PÉTER

Kombinatorikai feladatok középiskolásoknak

Az elmúlt évek során többször volt alkalmam arra, hogy kipróbáljam, hogyan lehet 15–16 éves érdeklődő, de nem kiugró képességű tanulók számára a kombinatorikus gondolkodásmód elemeit bemutatni. Tapasztalataim szerint a legalkalmasabb erre egy, a következőkben leírthoz hasonló feladatsor. Ezt a feladatsort természetesen mindig az adott tanulócsoporthoz, az adott foglalkozás "légköréhez", a gyerekek ötleteihez, fogadókészségéhez kell igazítani. Íme a feladatsor:

1. Vizsgáld meg a következő "számháromszöget"!

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

21 23 25 27 29

31 33 35 37 39 41

a./ Hány szám áll a 10., 20., 100., n. sorban?
b./ Melyik szám áll a 10., 20., 100., n. sor végén?
c./ Mennyi a 10., 20., 100., n. sorban álló számok összege?

2. Az előző kérdéseket a következő számháromszöggel kapcsolatban is vizsgáld meg és válaszolj rájuk:

1

2 3

4 5 6

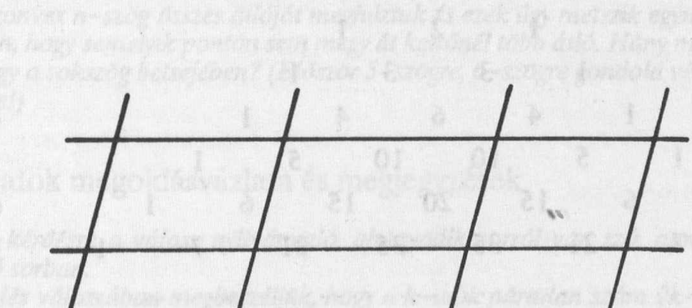
7 8 9 10

11 12 13 14 15

16 17 18 19 20 21

22 23 24 25 26 27 28

3. Hány paralelogramma látható ezen az ábrán?



4. Hány téglalap látható a sakktáblán?

5. Hány négyzet látható a sakktáblán?

6. Hány téglatest van a bűvös kockában?
(Úgy képzeljük, hogy középen, belül is egy "kis kocka" van!)

7. Hány kocka van a bűvös kockában?

8. Hány részre osztja az egyenest 2, 3, 10, n pont?
A részek között hány szakasz és hány félegyenes van?

9. Legfeljebb hány részre osztja a síkot 2, 3, 4, 5 egyenes?
(Készíts táblázatot!)
És n egyenes?
Ha S(n) a részek száma, akkor keress kapcsolatot S(n) és S(n−1) között!
Próbálj S(n)−re közvetlen képletet találni!

10. Legfeljebb hány részre osztja a teret 2, 3, 4, 5 sík?
Az előző feladat módszerét alkalmazd és a további kérdéseket is fogalmazd meg térre! (Legyen t(n) a térrészek száma n sík esetén.)

11. Az S(n) síkrészek közül hány nem korlátos és mennyi a korlátos síkrészek száma?
Általánosíts térre!

12. Vizsgáljuk meg a következő számháromszöget, az ún. Pascal−háromszöget:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc|l}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & \text{0. sor}\\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \text{1. sor}\\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \text{2. sor}\\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \text{3. sor}\\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \text{4. sor}\\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \text{5. sor}\\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \text{6. sor}\\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \text{7. sor}\\
\end{array}
$$

. . . .

Jelölések: az n−edik sor k−adik eleme: $\binom{n}{k}$

(olvasd "n alatt k").

Képzési szabály: a nulladik és az első sor adott, minden további sor nulladik és n−edik eleme 1, a többire:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Mennyi az n−edik sor első és második eleme?
Mennyi az n−edik sor elemeinek összege?
(Először konkrét n−re próbálkozz!)

13. Sorold fel a {0,1,2} háromelemű halmaz 0, 1, 2, 3 elemű részhalmazait!

14. Sorold fel egy 4, ill. egy 5 elemű halmaz összes 0, 1, 2, 3, 4, illetve 0, 1, 2, 3, 4, 5 elemű részhalmazait!

15. Keress összefüggést a 4 elemű halmaz 1 és 2 elemű részhalmazai, valamint az 5 elemű halmaz 2 elemű részhalmazai között!

16. Jelölje C_n^k az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát! Igazold, hogy

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

17. Az első feladat alapján bizonyítsd be, hogy

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

18. Mutasd meg, hogy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, *általában* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

19. Igazold, hogy ha p prímszám, akkor $\binom{p}{k}$ *osztható p-vel* $(0<k<p)$*!*

20. Egy konvex n–szög összes átlóját meghúztuk és ezek úgy metszik egymást 2 sokszög belsejében, hogy semelyik ponton sem megy át kettőnél több átló. Hány metszéspont keletkezik így a sokszög belsejében? (Először 5–szögre, 6–szögre gondold végig, azután általánosíts!)

A feladatok megoldásvázlata és megjegyzések

1. Az a./ kérdésre a válasz nyilvánvaló, ahányadik sorról van szó, annyi szám áll a megfelelő sorban.
A b./ kérdés válaszában megbeszéljük, hogy a k–adik páratlan szám 2k–1 és az első n sorban összesen $n(n+1)/2$ *szám áll, tehát az n–edik sor végén az ennyiedik páratlan szám, azaz* $n(n+1)-1$ *áll.*
A c./ kérdéssel kapcsolatban érdemes sejtést kialakítani. Az első 4–5 sor összegét kiszámítva már kialakul a sejtés: az n–edik sorban álló számok összege n^3*. Itt azt is megbeszélhetjük, hogy a 100. sor összegének kiszámítása helyett célszerű azonnal az n. sor összegét számolni, majd azt alkalmazni n = 100–ra.*

Az n–edik sor elemeinek összege:

$$[(n-1)n+1]+[(n-1)n+3]+\dots+[(n-1)n+2n-1]=n^2(n-1)+(1+3+\dots+2n-2)=$$
$$=n^3-n^2+n^2=n^3.$$

2. Az a./ kérdésre a válasz itt is nyilvánvaló.
A b./ kérdésre való válasz keresése közben az előző feladatbeli meggondolásokat is hasznosíthatjuk:
az n–edik sor végén $n(n+1)/2$ *áll.*

A c.| kérdés esetén itt "sejteni" nehéz! Könnyebb azt kiszámolni, hogy mennyit kapunk, ha az első n sor összegéből kivonjuk az első n−1 sor összegét. Az eredmény:

$$n(n^2+1)/2$$

3. Az egyik irányban 4 párhuzamos egyens, a másik irányban 32 párhuzamos egyenes halad. Minden paralelogrammához mindkét irányból 2−2 egyenes "tartozik". Annyi paralelogramma van tehát, ahányféleképpen ki tudok választani 2•2 páronként párhuzamos egyenespárt: $((4\cdot3)/2)\cdot((3\cdot2)/2)=18$

4. Az előző feladat gondolatmenetét követve összeszámolható, hogy a sakktáblán összesen $((9\cdot8)/2)^2=36^2$ *téglalap található.*
(Itt az egybevágó téglalapokat is külön−külön számoltuk!)

5. Itt egészen más módszerrel érünk célhoz. Külön−külön számoljuk össze az 1,2,...,8 oldalú négyzeteket. 1 oldalú négyzetből $8^2=64$ *van. A 2 oldalú négyzetknek vizsgáljuk a bal felső csúcsát, hány fér rá így a sakktáblára. Világos, hogy* $7^2=49$*. Hasonlóan adódik a 3 oldalú négyzetekből* $6^2=36$*, és így tovább, végül a 8 oldalú négyzetből* $1^2=1$ *fér rá a sakktáblára.*
Összesen tehát 64+49+36+25+16+9+4+1=204 négyzet "látható" a sakktáblán.

6. A kockát 4x4x4 párhuzamos sík alkotja, így a 4. feladat megoldásához hasonlóan összesen $((4\cdot3)/2)\ =216$ *téglatest van a bűvös kockában.*

7. Az 5. feladat megoldásához hasonlóan okoskodhatunk.
Az eredmény: $3^3+2^3+1^3=36$*.*

8. Az egyenest n pont n+1 részre osztja, ezek közül n−1 szakasz, 2 félegyenes.

9. A táblázat a következő:

n	S(n)
2	4
3	7
4	11
5	16
•	•
•	•
n	S(n)=S(n−1)+n

Természetesen rajzot érdemes készíteni hozzá!
Az $S(n)=S(n-1)+n$ *összefüggés bizonyításához elég észrevenni, hogy ha már n−1 egyenest meghúztunk a síkon úgy, hogy azok* $S(n-1)$ *részre osztják a síkot, akkor az n-edik egyenest meghúzva úgy, hogy az előző n−1 egyenes mindegyikét messe, akkor ezen n−1 metszéspont keletkezik. A 8. feladatból tudjuk, hogy ezek n részre osztják az egyenest. Mindegyik ilyen egyenes rész egy régi síkrészt "vág ketté", tehát a síkrészek száma n−nel nő.*
Az $S(n)$*−re közvetlen képletet kaphatunk például a következő gondolatmenettel:*

$$S(n)=n+S(n-1)=n+n-1+S(n-2)=\ldots=n+n-1+\ldots+2+S(1)=$$
$$=n+n-1+\ldots+2+2=n(n+1)/2+1$$

10. Itt is táblázatot érdemes készíteni:

n	t(n)
1	2
2	4
3	8
4	15
5	26

A "sejtés" kialakításához érdemes az S(n) táblázatát is figyelni, így ezt kapjuk: $t(n)=t(n-1)+S(n-1)$.

Az összefüggés igazolása itt is úgy történhet, hogy észrevesszük: az n–1 sík után fölvéve az n–edik síkot, ezt az előző síkok n–1 egyenesben metszik, tehát S(n–1) részre osztják. Így az előzőekben kapott t(n–1) térrész közül S(n–1)–et "kettévágunk", tehát ennyivel nő a térrészek száma.

A t(n)–re közvetlen képletet ezek alapján adhatunk: $t(n)=1/6(n^3+5n+6)$.

11. Az S(n) síkrész közül 2n a végtelen síkrészek száma, hiszen minden egyenesből két félegyenes keletkezik és minden félegyenes két végtelen tartomány határa. Így a korlátos síkrészek száma: $\frac{1}{2}n(n+1)+1-2n=\frac{1}{2}(n^2-3n+2)$.

12. Az n–edik sor első eleme n, ez a képzési szabályból következik. A képzési szabályból adódik, hogy az n–edik sor 2. eleme:

$$1+2+3+...+n-1=n(n-1)/2$$

Az n–edik sor összegére hamar kialakul a sejtés: 2^n.
Például a képzési szabály alapján (teljes indukcióval) igazolható.

13. A keresett halmazok:	*számuk:*
0	1
{0},{1},{2},	3
{0,1},{0,2},{1,2},	3
{0,1,2}.	1

14. Csak az egyes részhalmazok számát tüntetjük fel:

4 elemű halmazra:	*1*	*4*	*6*	*4*	*1,*	
5 elemű halmazra:	*1*	*5*	*10*	*10*	*5*	*1.*

15. Legyen a 4 elemű halmaz: {0, 1, 2, 3}.
Ennek kételemű részhalmazai:
{0,1}, {0,2}, {0,3}, {1,2}, {1,3},
összesen 6, egyelemű részhalmazai:
{0}, {1}, {2}, {3},
összesen 4.

Az öt elemű halmaz úgy képezhető, hogy a négyelemű halmazhoz egy új elemet veszünk hozzá: {0,1,2,3,4}. Ennek minden olyan kételemű halmaz szintén kételemű részhalmaza, ami a négyelemű halmaznak kételemű részhalmaza. A további kételemű *részhalmazát úgy kapjuk, hogy a négyelemű részhalmaz egyelemű részhalmazához hozzáveszzük az új elemet:*

$\{0,4\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}$.

Az ötelemű halmaz kételemű részhalmazainak száma tehát $4+6=10$.

16. Az előző feladat gondolatmenete általánosítható: ha a $\{0,1,2,...,n-1\}$ *n−elemű halmazból úgy képezzük az* $n+1$ *elemű halmazt, hogy egy új elemet hozzáveszünk:* $\{0,1,2,...,n-1,n\}$, *akkor az utóbbi halmaz* $k+1$ *elemű részhalmazai az n−elemű halmaz* $k+1$ *elemű részhalmazai és azok a* $k+1$ *elemű halmazok, amelyeket az n−elemű halmaz k−elemű részhalmazaiból úgy kapunk, hogy az új elemet, n−et hozzávesszük ezekhez. Ezzel az állítást igazoltuk.*

17. Mivel az üres halmaznak csak egy − üres − részhalmaza van, az 1 elemű halmaznak 1 üres és 1 egyelemű részhalmaza van, így

$C_0^0=\binom{0}{0}$, $C_1^0=\binom{1}{0}$ és $C_1^1=\binom{1}{1}$

Mivel a Pascal háromszög képzési szabálya és a Ck számok közti előzőleg bizonyított összefüggés azonos, ezért az állítás igaz.

18. Az $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\,...\,(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

összefüggés közvetlenül adódik, ha úgy okoskodunk, hogy k *helyre* n *elem közül választhatunk, de a kiválasztott elemek sorrendje nem számít.*

19. Mivel $\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$ *és a feltétel szerint* $0<k<p$,

a számláló osztható p−vel, a nevező nem, így a $\binom{p}{k}$ *egész szám is osztható p−vel.*

20. A bizonyítás lényege: két átló metszéspontját a sokszög belsejében az a négy csúcspont egyértelműen meghatározza, amelyk az átlók végpontjai. Így annyi metszéspontot kapunk a sokszög belsejében, ahányféleképpen n csúcs közül 4−et ki tudunk választani: azaz $\binom{n}{4}$*-et.*

URBÁN JÁNOS

Egy csodaszép matematikakönyvről

Az 1991/92−es tanévben a Takács Gábor *és* Takács Gáborné *szerzőpáros és a* Tankönyvkiadó *jóvoltából küllemét és tartalmát tekintve egyaránt dícséretes első osztályos matematika−tankönyv került forgalomba.*

Az alternatívan választható első osztályos matematika−tankönyvek közül nemcsak az árát tekintve, (kb. tizede a többinek) hanem a benne feldolgozott matematika−anyagot és a feldolgozás mikéntjét is figyelembe véve minden mostani és jövendő első osztályos kisdiák táskájába ajánlom. A kisgyermekek három hónap eltelte után sem győznek betelni vele, órán kívül is lapozgatják, alig várják, hogy egy−egy képhez eljussanak, sőt önállóan "előre dolgoznak". A képanyag változatos, szép kivitelezésű és ami