HACK FRIGYES

A függvényfogalomról

A matematika egyik legfontosabb fogalma a *függvény*. Ebben a matematikával foglalkozók, a matematikát alkalmazók és nem utolsósorban a matematikát tanítók messzemenőkig egyetértenek. Abban már van némi véleménykülönbség, hogy a középiskola végéig még milyen, ehhez hasonlóan fontos fogalom kialakítása szükséges és lehetséges. A fogalom kialakításának szükségességénél csak egy dolog fontosabb, a precíz, korrekt, ellentmondásmentes, vagyis a *helyes* fogalomalkotás. Az igényes fogalomalkotást teljessé az *egzakt definíció* teszi. Erre azonban sok esetben a középiskola különféle pedagógiai okokból nem vállalkozik. Egyik ilyen ok az, amire az *életkori sajátosságok* megjelölésével hivatkozunk, egy másik pedig, mely ezzel némileg összefügg az, hogy nincs elegendő előzmény az absztrakcióhoz, nincs idő az előkészítéshez.

Vannak olyan fogalmak, melyeknek a tárgyalását a középiskola nem fejezi be, nem jut el az általános, tudományos definícióig, ugyanakkor a fogalmat sok reprezentációjával kiterjedten és nem kis időtartamban használja. Ilyen fogalom például a *vektor*, ami egy érettségizett számára *irányított szakasz*. Jobb esetben a végzett diák még hozzáteszi, hogy *vektor az eltolás, az erő*, és még egynéhány vektorteret is megnevez. Nem adjuk meg tehát a *valós számtest feletti vektortér* definícióját, de egy–két konkrét vektortér feladatainak kidolgozása révén megnyugtatóan tisztázzuk a vektortér tulajdonságait, műveleteit, struktúráját. Említhetnénk még a számfogalmat is, hiszen sem az egészek, sem a racionális, sem a valós számok absztrakt definícióját nem tágyaljuk, de még a definíciót helyettesítő *fogalom–leírást* sem fogalmazzuk meg. A példák sorát folytathatnánk, de szerencsére kivételek is vannak. Ilyen az analízisben a határérték, a geometriában az euklideszi szerkesztés, stb. Elmondhatjuk, hogy a fogalomalkotás terén az említett akadályok által ránk kényszerített kompromisszumokkal élünk. Az axiomatikus tárgyalás helyett gyakran olyan szintetikus megközelítést alkalmazunk, amelyben a fogalom definiálása helyett annak *körülírását, magyarázatát* adjuk, s ezzel az adott fogalmat az *alapfogalom* szintjére emeljük (süllyesztjük?).

Felmerülhet ezek után a kérdés, hogy vajon a kardinális függvényfogalom esetében milyen álláspontot foglaljunk el? Tekintsük alapfogalomnak, sok másikhoz hasonlóan, vagy adjuk meg egy, netán a legáltalánosabb definícióját? Egy dolog azonban nem képezheti vita tárgyát. Nevezetesen, hogy bármelyik megoldást választjuk, *helyes leírást* kell adni.

Azt hiszem, eddig nyitott kapukat döngettem. Nem hiszem, hogy akár a közfelfogás, akár egyéni álláspontok a fentiekkel ellentétben lennének. Az elgondolás kivitelezése azonban akadályokba ütközik, mert az a függvényfogalom, mely jelenleg a szaktanárok körében elfogadott, és ennek következtében diákjainknak ismerettárába is bekerül, *nem megfelelő*. Mielőtt a részletezést elkezdeném, ez utolsó jelzőt pontosítanom illik. Nem azt mondom, hogy rossz a tanított fogalom, hanem csupán azt, hogy nem teljesen megfelelő. Ha összevetjük a jelenlegit megelőző tantervekben szereplővel, akkor azokhoz képest határozottan korszerűbb, jobban megközelíti a helyes értelmezést. Ha azonban a tananyag más részletei által nyújtott lehetőségekhez, feltételekhez viszonyítjuk, akkor tökéletesíthető. Erre kívánok egy megoldást mutatni a következőkben.

1. Az érvényes tantervet tekintve etalonnak az elemzés tárgyát képező függvényfogalom a következőképpen írható:

Két halmaz (elemei) közötti egyértelmű megfeleltetés (hozzárendelés) úgy, hogy az egyik halmaz *minden eleméhez* tartozik egy megfeleltetett elem a másik halmazban. Ehhez a megfogalmazáshoz (nem definíció!) kapcsolódnak még a következő fogalmak, elnevezések: értelmezési tartomány, képhalmaz, helyettesítési érték, értékkészlet. Az így bevezetett fogalmat később, esetleg az évvégi, vagy az érettségi előtti összefoglalásban kiegészítjük még néhány megjegyzéssel, magyarázattal. Ezek közül ki kell emelni azt, hogy e fogalomalkotás szerint az értelmezési tartományt határozottan, pontosan kell kijelölni, megadni, amikor egy függvényt konstruálunk. Ugyanakkor az értékkészlet helyett elegendő az őt tartalmazó képhalmazt leírni, mert ilyet könnyebb megadni. Sőt, néha még ez is felesleges, mert a hozzárendelés legtöbbször triviálisan definiálja a képhalmazt, vagy akár az értékkészletet.

Talán jobb lett volna, ha tankönyvekből idézek, de nem célom a tankönyvek szerzőivel vitatkozni, csupán az általuk közvetített felfogással, értelmezéssel. Egy megjegyzést azonban a tankönyvek (4), (5) szövegével kapcsolatban itt be kell iktatnom: a fenti fogalomleírással analóg megfogalmazásról a Szerző is kijelenti, hogy nem a függvény, csupán a függvény megadásának értelmezése. Nézzük meg részleteiben, hogy ebben a felfogásban melyek a jó, a régebbi szemlélethez képest tudományosabb, korszerűbb elemek. A legkorábbi tankönyv, mely a középfokú oktatásban a függvényekkel foglalkozik, a Borossay-féle (1), majd ennek átdolgozásai még így fogalmaznak: "Ha két változó, pl. y és x oly összefüggésben van egymással, hogy y-nak értékei az x értékeitől függnek, akkor az y-t az x függvényének, az x-et pedig független változónak mondjuk." Az átdolgozásokban némi módosítással sikerült ezt még egy kissé elrontani azáltal, hogy a leírásba bekerült a következő fordulat: "...ha x változása maga után vonja...". Tagadhatatlan, hogy a függvényfogalom történeti kialakulásának kezdetén ilyen ok-okozati szemlélet létezett, de már a Dirichlet-féle definíció (9) szakított ezzel.

Ugyancsak retrográdnak tekinthetők azok a lépések, melyeket a háború utáni első tankönyvek tettek meg e téren. Egyrészt azonosítják a függvénnyel a *képletet:* "...minden algebrai kifejezés a benne szereplő változók függvénye..." (10), másrészt a *megfeleltetést*: "Függvénynek nevezünk minden olyan megfeleltetést..." (3).

Nem lényegtelen a terminológia változása sem. A már említett Dirichlet-definíció *egyértékű függvényt* említ, vagyis a korábbi szóhasználatban *függvény* a mai terminológia szerinti *reláció*. Ennek megfelelően egyes szerzők (8), (11) a függvény definíciójában az "egy vagy több érték" hozzárendeléséről beszélnek. Legjobb meghatározásnak tekinthetjük a következőt: Az *egyértelmű* hozzárendeléssel megadott relációt nevezzük függvénynek. Ez a megfogalmazás elfogadható, de csak akkor, ha a relációt ezt megelőzően helyesen definiáljuk. Azt hihetnénk, hogy ez egyszerűen az *egyértelmű* jelző elhagyásával megvalósítható. Sajnos ez nem elegendő. A kritikai megjegyzések felsorolása és indoklása helyett a következő szakaszban megadunk egy lehetséges helyes értelmezést.

2. Nyilvánvaló, hogy a függvény nem "*egyszerű*", hanem összetett fogalom. Ezért egy függvény megadásához több alkotórészt, *komponenst* kell megadunk. Nevezetesen két halmazt és egy egyértelmű megfeleltetést (hozzárendelést, leképezést). A *halmaz* és a *megfeleltetés* fogalmát előzetesen tisztázottnak, itt *alapfogalomnak* tekintjük. Az első halmazt a *függvény bázishalmazának*, a másodikat a *függvény képhalmazának* fogjuk nevezni. A függvény harmadik komponensét, a leképezést megadhatjuk körülírással, formulával, táblázattal, grafikonnal, algoritmussal. (A felsorolás nem teljes.) Kissé általánosabb megfogalmazásban a leképezést vagy egy döntési szabállyal (v.ö.: halmaz megadása) vagy egy konstrukciós (kiszámítási) szabállyal adjuk meg.

Némi formalizmust, jelölési szimbolikát alkalmazva: Az f függvényt a $<B,K,F>$ hármassal adjuk meg, ahol B a bázishalmaz, K a képhalmaz és F a leképezés. Ha az $x \in B$ & $y \in K$, akkor y az x képe. Ezt így jelöljük: $y=f(x)$. A függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$$D_f = [: x \mid x \in B \ \& \exists f(x) \in K :]$$
$$R_f = [: y \mid y \in K \ \& \ y=f(x) \ \& \ x \in D_f :]$$
$$(D_f \subset B \vee D_f = B) \ \& \ (R_f \subset K \vee R_f = K).$$

Látható, hogy ez az értelmezés egyetlen ponton tér el a köztudatban levőtől. Éspedig abban, hogy bevezeti a *bázis* fogalmát. Az utolsó formula első eleme az, ami a jelenleg használt koncepcióban nem szerepel.

Nagyon egyszerűen belátható ennek az értelmezésnek az előnye. Mint azt már említettük,, a képhalmaz–értékkészlet megkülönböztetésével a függvény második komponensét privilégizáljuk. A javasolt új értelmezés hasonló kapcsolatot létesít a bázis–értelmezési tartomány viszonylatban. Arra kell elsősorban gondolnunk, hogy egy konkrét függvény megadásakor célszerű megengedni, hogy a három komponenst *szabadon, egymástól függetlenül* jelölhessük ki. Gondoljuk végig, hogy ha megadunk egy *tetszőleges* $<$*bázishalmaz, képhalmaz, leképezés*$>$ hármast, azaz egy most értelmezett függvényt, egyetlen extrém esetben sem kapunk értelmetlenséget. Ha ugyanis B az üres halmaz, a függvény is az üres függvény lesz. Ha B-nek nem minden elemére 'értelmes' a leképezés, akkor a D_f valódi részhalmaza lesz B-nek. Ha egyetlen elemre sem értelmes a hozzárendelés, akkor üres értelmezési tartományt és függvényt adtunk meg. Ha a leképezés valamennyi, vagy minden argumentumra értelmes ugyan, de nincs képük a képhalmazban (szűken adtuk meg a képhalmazt), akkor is az üres függvénnyel állunk szemben. Az a tény, hogy egy függvény megadásakor a bázist adjuk meg, nem jelenti egyben azt, hogy bázisként olyan maximális, a legbővebb halmazt kell megadnunk, amelyen a hozzárendelés értelmezhető.

Meg kell jegyezni, hogy ebben, a relációt kikerülő értelmezésben a hozzárendelés, mint alapfogalom szerepel, és ez nem olyan primitív fogalom, mint a rendezett pár fogalma. Olyan értelmezést adtunk tehát a függvényre (a függvény megadására), melynek *értelmezési tartományához* tartozik minden halmaz(pár) és egyértelmű megfeleltetés. Az is triviális, hogy az egyértelmű jelzőt elhagyva a *reláció* konstrukciós értelmezéséhez jutunk.

Az itt leírt értelmezést a függvényfogalom tanításában, kialakításában alkalmazhatjuk. A tanár számámra fontos, hogy e didaktikai megközelítésnek mi a pontos, tudományos háttere. Ezért a következő szakaszban egy axiomatikus felépítést mutatunk be. Ez a megközelítés a formalizmus esetleges lazításával, néhány absztrakt elem beszűkítésével a téma összefoglalására, speciális osztályokban pedig a téma tanítására is alkalmas.

3. A jelen keretek között csak vázolhatjuk az axiomatikus felépítést, azaz a konvencionális elemekre azok részletezése nélkül utalunk, és csak azokra, melyek szükségesek.

Halmazok

Univerzum: A világmindenség, a világegyetem. Együtt minden "dolog", ami volt, van vagy lesz. Ezek a dolgok élő vagy holt, valódi vagy elképzelt tárgyak, élőlények, fogalmak.

Elemek: Az Univerzumot alkotó dolgokat elemeknek, az Univerzum elemeiek nevezzük. Szimbolikusan: $x \in U$.

Halmaz: Az Univerzum néhány (akárhány) elemét kiválaszthatjuk, elkülöníthetjük a többitől. Ezek egy halmazt (együttest, ...) alkotnak. Azt, hogy az Univerzum egy x eleme az M halmazhoz tartozik-e vagy sem, így jelöljük: $x \in M$ illetve $x \notin M$.

Szelektor: Az M halmaz elemeit az Univerzumból valamilyen szempont szerint gyűjtjük ki. Az ezt leíró, meghatározó *szelektor* lehet egy *eldöntési szabály*, mellyel az Univerzum *minden* eleméről megállapítható, hogy M-hez tartozik-e; vagy lehet egy *konstrukció*, mellyel M halmaz elemeit kiválogatjuk, összegyűjtjük. Egy konkrét M halmazt tehát az jellemez, hogy elemei az Univerzumból valók, és az, hogy melyik szelektor válogatja ki ezeket. Ezt a következő szimbólummal fejezzük ki:

$M = [: x \in U | S_M(x) :]$

Az Univerzum halmaz, szelektora Σ. $U = [: x \in U | \Sigma(x) :]$

Definíciók (részletezés nélkül): részhalmaz, az üres halmaz, unió, metszet, különbség, komplementum, *rendezett pár*, Descartes-szorzat.

Minden halmaz az U részhalmaza. Ezt nyomatékosíthatjuk, ha M egy A részhalmazát is így jelöljük: $A = [: x \in M | S_M(x) :]$

Az $M = U$ esetén a következő egyszerűbb írásmódot használjuk az A halmaz jelölésére: $A = [: x | S(x) :]$

Relációk

Legyen B és KL két halmaz és P a BxK-nak egy részhalmaza. Azt mondjuk, hogy P a B és K elemei között egy π relációt értelmez. Azt mondjuk, hogy $x \in B$ *és* $y \in K$ elemek π relációban vannak, ha az $(x,y)\in BxK$ rendezett pár P–nek is eleme. Így is írhatjuk: $x\pi y$.

Ha $(x,y)\in P$, akkor y–t az x *egyik* képelemének nevezzük és ezt így jelöljük: $y=\pi(x)$.

Egy $x\in B$ elem képhalmaza: $\pi[x] = [: y / y\in K \,\&\, x\in B \,\&\, y = \pi(x) :]$

A B halmazt a π reláció bázisának, a K halmazt a π reláció képhalmazának nevezzük. Ha P az üres halmaz, akkor a π relációt üres relációnak nevezzük.

A π reláció értelmezési tartománya:

$D_\pi = [: x / x\in B \,\&\, \exists y(y\in K \,\&\, y = \pi(x)) :]$

A bázis H részhalmazának képe (képhalmaza):

$\pi[H] = [: y / y\in K \,\&\, x\in H \,\&\, y = \pi(x) :]$

Az értékkészlet az értelmezési tartomány képe: $R_\pi = \pi[D_\pi]$

Függvény

Definíció–1.: Azt a relációt, melyben az értelmezési tartomány minden elemének képhalmaza egyelemű halmaz, függvénynek nevezzük.

Definíció–2.: Azt a relációt, melyben a bázis minden elemének képhalmaza legfeljebb egyelemű halmaz, függvénynek nevezzük.

4. Nincs jó vagy jobb axiómarendszer. Arról beszélhetünk, hogy egyik felépítés szimpatikusabb a másiknál. A pedagógiai alkalmazásnál a fő szempont az, hogy egy fogalomrendszer tanításának alapjául szolgálhat-e egy adott axiomatikus kifejtés. A módszertani feldolgozásban alkalmazott axiomatikus–elv azonban nem jelent axiomatikus tárgyalást. Megengedhető, sőt meg kell engednünk bizonyos egyszerűsítést. A feldolgozás alapját képező axiomatika csupán vezérfonal; a fogalmakat olyan sorrendben tárgyaljuk, ahogyan azt az axiomatikus kidolgozás teszi.

A javasolt felépítés első lépcsőjében a halmazok tárgyalásánál vezettünk be néhány új elnevezést és szemléletmódot. Az Univerzum absztrakt fogalmáról egy felnőtt nem igényel sok kommentárt. A diák számára egy kézenfekvő asszociáció a népszerű kicsoda–micsoda (Barkochba) játék. E játék művelői ismerik a stratégiát: fokozatosan szűkítjük a szelektort.

A szelektor fogalom ebben a felépítésben az eldöntési szabályon kívül a konstrukciót is tartalmazza. E konstrukció lehet például taxatív felsorolás, rekurzió vagy bármilyen algoritmus, eljárás stb. Az a felfogás, hogy egy halmazt prédikátummal, tulajdonsággal adunk meg, rejtve a logikai függvény fogalmát csempészi be az értelmezésbe. Ugyancsak elkerülhető, hogy a függvényt a vele szinoním *hozzárendelés, megfeleltetés* szavakkal írjuk körül.

Az axiomatikus felépítésben a halmaz illetve a reláció definiálására egy–egy módot adunk meg alapfogalomként. Más, ekvivalens megadási módokat reprezentációs tételekben kell megfogalmazni. Az elemi feldolgozásban elegendő megmutatni ilyen más módokat. Például a relációt fentebb egy $<X,Y,R>$ hármassal definiáltuk, ahol $R\subset X \times Y$. Megmutatható, hogy az $<X,Y,S>$ is (ahol S egy halmaz szelektor), meghatároz egy relációt. Nevezetesen azt az $<X,Y,R>$ hármast, melyben

$R=[:(x,y)\,|\,S:]$. A relációnak ugyanilyen más reprezetnációja, megadási módja lehet a BxK–ban értelmezett tulajdonság, mint *logikai függvény*.

A javasolt értelmezés lényeges eleme a bázis, bázishalmaz. Szerepeltetése a függvény (reláció) megadásában rendkívül előnyös. Erre itt csak néhány példát említenék. A közvetett függvény definíciójához nem szükséges az $R_g \cap D_f = 0$ feltétel. Ennél is fontosabb, hogy nem szükséges az összetett függvény értelmezési tartományát *őskép*ként, az *inverz* függvény alkalmazásával előre meghatározni. (*Előre*, ha az $f \circ g$ megadásához az értelmezési tartomány kell.) Triviális, hogy az $f \circ g$ közvetett függvény bázisa $g=<X,Z,G>$ bázisa, képhalmaza $f=<Z,Y,F>$ képhalmaza.

Értelmezhetők, értelmessé válnak azok a régi feladatok, melyek most így szólhatnak: "Határozzuk meg az $f=<X,Y,F>$ függvény értelmezési tartományát!" Vagy nézzük példaként a függvény ábrázolását. Ha így fogalmazzuk a feladatot, hogy ábrázoljuk a tangens függvényt, akkor szigorú értelmezés szerint a feladat megoldhatatlan, hiszen az egész Descartes síkot nem tudjuk fizikailag reprezentálni. Valamivel pontosabb fogalmazás: Ábrázoljuk a grafikon egy darabját. Ez másszóval azt írja elő, hogy a tangens függvény egy *leszűkítésének* grafikonját rajzoljuk meg. Mivel ez a leszűkítés is függvény, meg kell adnunk a képhalmazát: az ordinátatengely papírra kerülő intervallumát. De meg kellene pontosan adnunk az értelmezési tartományt is, ami nem is olyan triviális. Mit teszünk a gyakorlatban ilyenkor? Megadjuk az abszcisszatengely egy intervallumát, azaz a leszűkítés bázisát. Ezzel az ábrázolandó függvényt értelmezésünk szerinti három komponensének megadásával egyértelműen definiáltuk.

5. A függvényfogalom módosítása néhány további fogalom beveztésén kívül más változásokkal is jár. Egyik legfontosabb ezek közül, hogy nem mondhatjuk azt, hogy a függvény (reláció) az XxY egy *részhalmaza*. Mint láttuk, a függvény összetett fogalom, így nem azonos egyik *komponensével* sem. Ha erről a részhalmazról akarunk beszélni, adjunk neki nevet: *értéktáblázat*. Véges részhalmaznál eddig is így neveztük, definícióval kiterjeszthetjük az elnevezést. Ehhez kapcsolódik még, hogy az *üres függvény* nem azonos az *üres halmazzal*. (null–vektor és a nulla valós szám.)

Használjuk a *szuperjekció* elnevezést annak a tulajdonságnak a kifejezésére, hogy az értékkészlet a képhalmazzal azonos. Úgy is mondjuk, hogy ekkor a függvény D_f–et az Y–ra, ellenkező esetben az Y–ba képezi le. Hasonlóan szükséges megkülönböztetni az értelmezési tartomány és a bázis kétféle lehetséges viszonyát. Erre alkalmas a *parciális* függvény elnevezés, ha D_f valódi részhalmaza a bázisnak.

A függvényfogalom kialakításakor szerepel a tananyagban a halmazokról és relációkról némi ismeret. Bizonyára az időhiány az oka, hogy részletezésükre nem kerül sor. Mivel a tanterv gerincében a valós függvénytan áll, az említett témák csak alárendelt szerepet kapnak. Van azonban néhány egyszerű feladat, melynek a kidolgozására fordított idő megtérül. A halmazok és relációk ábrázolására tradíciónk szerint mutathatunk néhány Venn–diagramot és gráfot. Valós számpárokból képzett halmazok és valós–valós relációk ábrázolására is egyszerű feladatok sokaságából válogathatunk. Például: egyenlőtlenséggel megadott relációk, osztó, többszörös, legnagyobb prímosztó, legkisebb valódi osztó, racionális számok ekvivalencia osztályai, stb. E feladatok egy része a koordináta geomertriából ismert, más részük más aspektusból a tananyag más részében kerül elénk.

Befejezésül egy terminológiai megjegyzés. Megállapodás kérdése, hogy egy fogalom megnevezésére milyen szót használunk. A $B \to K$ függvényosztályok megkülönböztetésére logikus à két halmaz típusának megnevezésével utalni. Az úgynevezett *homogén* relációk $(B=K)$ esetében elengendő – megállapodásszerűen – egy típusnév: valós függvények, komplex függvények.

Irodalom

1. **Borossay** D.: Algebra a középiskolák számára II., Szent István Társulat, 1919.
2. **Császár** Ákos: Valós analízis, Tankönyvkiadó, 1983.
3. **Horvay – Pálmai**: Matematika a gimnáziumok I. osztálya számára, Tankönyvkiadó, 1972.
4. dr. **Korányi** E.: Matematika I. osztály, Tankönyvkiadó, 1982.
5. dr. **Korányi** E.: Matematika (fakt. A) IV. osztály, Tankönyvkiadó, 1982.
6. **Kósa** András: Ismerkedés a matematikai analízissel, Műszaki Könyvkiadó, 1981.
7. **Maurer – Virág**: A relációelmélet elemei, Dacia (Kolozsvár), 1972.
8. **Sain** Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, 1974.
9. **Szász Pál**: A differenciál– és integrálszámítás elemei, Közoktatásügyi Kiadóvállalat, 1951.
10. **Varga** Tamás: Érettségi matematikai összefoglaló, Tankönyvkiadó, 1959.
11. **Vygodsky**, M.: Mathematical Handbook, MIR Publishers, 1975.