

A valószínűségi gondolkodás kialakulásának és fejlődésének kutatása

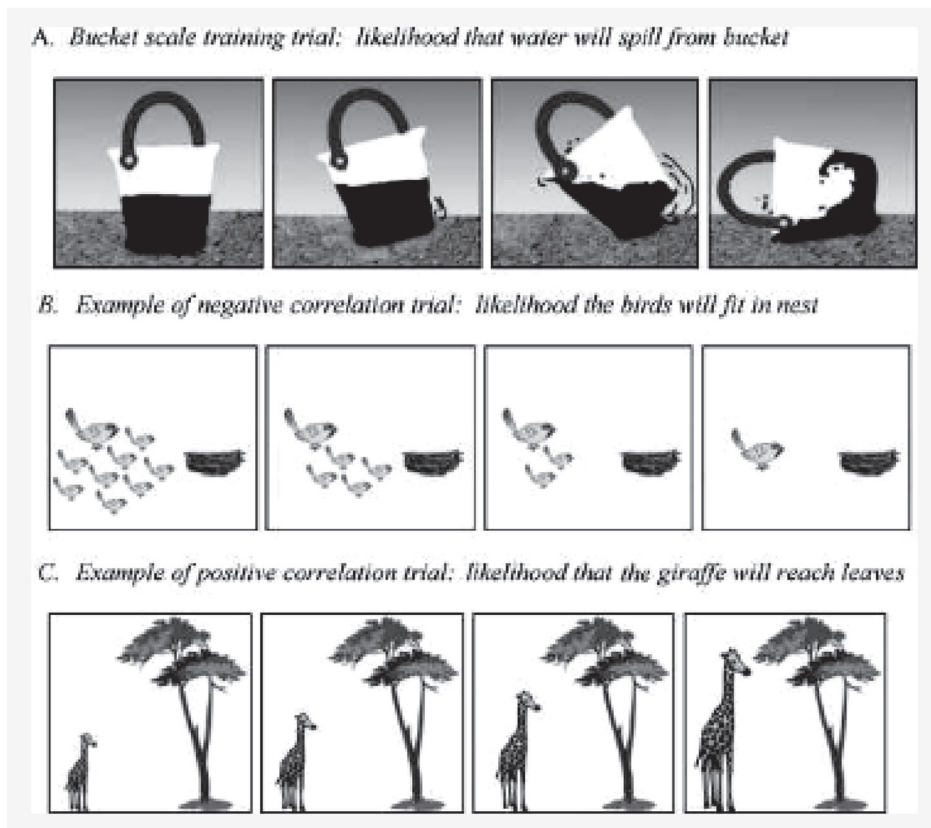
Az elmúlt mintegy hetven évben nagyon sokat megtudtunk a gyerekek gondolkodásáról, ezen belül a véletlenről, a kockázatról, általában a valószínűségről alkotott képükről is. A legmeghatározóbb kutatók új kutatási irányokat nyitottak és új kutatási módszereket vezettek be, melyek saját személyiségük nyomait is magukon hordozzák. Egyes társadalmi változások is éreztették hatásukat, például az 1970-es évektől a női kutatók megjelenésével sokkal nagyobb figyelem fordult a kisgyerekkor, a hat évnél, sőt a három évnél fiatalabb gyerekek felé, ide értve valószínűségi gondolkodásuk vizsgálatát is.

Ebben az összefoglalóban a valószínűségi gondolkodás alakulásának egyes vonásait mutatom be a születéstől a kisiskolás korig. Az ismertetett munkákban zömmel tíz év alatti gyerekek gondolkodását vizsgálták, de egy-egy utalás megtalálható a 15 év alattiakkal végzett eredményekre is. Azt vizsgálom, hogy a kutatási irányok és a valószínűség-fogalom eltérő filozófiai értelmezései milyen kapcsolatban vannak egymással, és a filozófiai értelmezések milyen hatással voltak az empirikus kutatásokra. A valószínűségi fogalomra vonatkozó kutatások történetének bemutatása után napjaink három fontos kutatási területét tekintem át.

A valószínűségi gondolkodás ('probabilistic thinking') kialakulásának és fejlődésének kutatása az 1940-es években kezdődött Genfben, a téma első alapműve 1951-ben született meg (Piaget és Inhelder, 1951). Ma a kutatások legalább három nagy területen folynak, más-más célkitűzésekkel. Ennek oka maga a 'valószínűségi gondolkodás' fogalom, amely két, önmagában is összetett fogalom összekapcsolásával született meg, ezért jelentése nem egyértelmű. A legtöbb, valószínűségi gondolkodásról szóló írás csupán annyit említ meg, hogy a pedagógiával foglalkozó kutatók a valószínűségi gondolkodást összetettsége miatt általában meg sem próbálják pontosan definiálni (Boyer, 2005). Általában egyetértenek Borovcnik és Peard (1996) véleményével, miszerint a valószínűségi gondolkodás a matematikai gondolkodás egy sajátos ága. Ám ez a meghatározás messze nem kielégítő. Ebből adódóan nagyon változatosak azok a tesztek, amelyekkel manapság a gyerekek valószínűségi gondolkodását kívánják vizsgálni. Nézzünk meg kettőt!

Egy dobozba 3 piros és egy kék macit tesznek (ezt a gyerekek látják, de a doboz nem átlátszó). A gyerekeket arra kérik, hogy válasszák ki, hogy milyen színű maci húzása valószínűbb, és indokolják meg a döntésüket (Way, 1998). A válasz után a gyerekek húznak egy macit, majd visszateszik a dobozba. A kérdést és a húzást ötször megismétlik.

A résztvevők képek sorozatait kapták, minden sorozat négy képből állt. A képeket egy 2x2-es mezőben véletlenszerűen helyezték el. A résztvevőknek egy személy érzéseire, gondolataira és jövőbe cselekedeteire vonatkozó kérdéseket tettek fel (Lagattuta és Sayfan, 2011). 201 négy és tíz év közötti gyereket és fiatal felnőtteket vizsgáltak, hogy mennyire értik meg a jövőbeli valószínűséget és a bizonytalanságot (1. ábra).



1. ábra. Ábrák a szubjektív valószínűség vizsgálatára (Lagattuta és Sayfan, 2011)

Az első esetben az a fő kérdés, hogy a gyerekek mely életkorban képesek a nem-valószínűségi gondolkodás helyett („a kék, mert az a kedvenc színem”, ahogy az 5–6 éves gyakran válaszolnak) valamiféle számolós indoklást adni („a piros, mert abból több van” vagy „a piros, mert annak nagyobb az aránya”). Vagyis mikor tudnak egy matematikai modellt, a klasszikus valószínűségi modell szerint helyes magyarázatot adni. A piros maci húzásának valószínűsége ugyanis egyértelmű: $\frac{3}{4} = 0,75$. A vizsgálatnak számos változata van (Way, 1998), melyek még jobban hangsúlyozzák a matematikai hátteret. Például az egyik dobozba 3 piros és 1 kék, a másikba 4 piros és 2 kék macit tesznek, és indirekten arra kérdeznak rá, hogy melyik dobozból nagyobb a piros maci húzásának esélye a gyerekek szerint. Például a piros maci húzása esetén jutalmat kapnak, de dönthetnek, hogy

melyik dobozból húznak becsukott szemmel. Ezzel kikerülünk az 'esély' szó használatát és általában a verbalitást. Ezekben az esetekben jól matematizálható feladatokról van szó.

A második kísérletnél viszont nem számolható ki pontosan a valószínűség, nincs mögötte egzakt matematikai modell. Inkább egyfajta múltbéli tapasztalatra, megérzésre kérdez rá a feladat: mennyire képes a gyerek a meglévő tudását hasznosítani egy újszerű, a véletlennel kapcsolatos helyzetben, milyen intuíciói vannak.

A két kísérlet tehát alapvetően mást kérdez. Az első inkább a matematika, a második az információfeldolgozás szempontjából közelít a valószínűségi gondolkodás vizsgálatának kérdéséhez.

Milyen értelemben beszélhetünk véletlenről?

Amikor a valószínűségi gondolkodás kialakulásának és fejlődésének kutatásáról beszélünk, tisztáznunk kell, hogy mit is értünk valószínűségi gondolkodáson. Ez a fogalom körülírhatatlan a valószínűség fogalmának ismerete nélkül. Valószínűségről viszont nem beszélhetünk a determinisztikus és az – ennek ellentétéként megfogalmazott – véletlenszerű vagy sztochasztikus folyamatok meghatározása nélkül.

A 20. századi fizika egyik legnagyobb felfedezése, hogy a világ nem determinisztikus (*Hacking*, 1990), a múlt nem határozza meg pontosan, hogy mi fog történni. Ezt a kijelentést sokan vitatják. Szerintük egy fizikai rendszer pillanatnyi belső állapota és a külső tényezők egyértelműen meghatározzák e rendszer jövőbeli állapotát. A kérdés a filozófia egyik fontos témája lett a felvilágosodás korától kezdve.

A legismertebb Laplace (1814) felfogása: „Az Univerzum jelenlegi állapotát úgy kell tekintenünk, mint a megelőző állapot következményét, és a rákövetkező okát. Ha adva volna egy értelem, amely ismerné az összes erőt, amellyel a természet rendelkezik és az őt alkotó létezők helyzetét egy elegendően hatalmas értelem tehát, amely elemezni lenne képes mindezt az adathalmazt, minden mozgást az Univerzum legnagyobb égitestétől annak legkisebb atomjáig, egyazon képletbe lenne képes foglalni; számára semmi sem lenne bizonytalan, és a jövő csakúgy, mint a múlt, jelen lenne szemei előtt.”

Karl Popper szerint (idézi: *E. Szabó*, 2002): „A determinizmus intuitív fogalmát úgy foglalthatjuk össze, hogy a világ olyan, mint egy mozgófilm: az éppen kivetített kocka a jelen. A filmnek az a része, amelyet már levetítettek, a múlt. Az a része pedig, amelyiket még nem láthattuk, a jövő.”

A deterministák szerint a jövő meghatározott, és elvileg megjósolható. Leibniz ennél is tovább megy: az ember látszatszabadságáról beszél. Az okság révén az emberi akarat és cselekvés is alá van vetve külső és belső feltételeknek: a környezeti hatásoknak és a környezet által módosított örökletes jellemünknek; így az akarat döntési szabadsága illúzió (*Hell*, 1997), szabad akaratról nem beszélhetünk.

Természetesen mást jelent, hogy a jövő megjósolható vagy elvileg megjósolható (*E. Szabó*, 2002), és ez a véletlen és a valószínűség szempontjából fontos különbség. (A sakkban elvileg eldönthető, hogy van-e valamelyik játékosnak az alaphelyzetben nyerő stratégiája, de ez még a legerősebb számítógéppel sem tehető meg az elképesztő számú lehetőség miatt.)

A deterministák szerint is értelmezhető a véletlen fogalma, de csak annyit jelent, hogy a megfigyelő számára ismeretlenek vagy megérthetetlenek az oksági láncok, ezért valószínűségről csupán tudásunk vagy megfigyelésünk hiánya miatt beszélhetünk.

Egy ellenvetés a determinizmussal szemben, hogy bizonyos helyzetekben, például bizonyos időjárási szituációkban nem jósolható meg, hogy mi fog történni, mert kis kezdeti változások vagy eltérések óriási változásokat okoznak a kimenetekben, azaz a rendszer későbbi állapotaiban (pillangóhatás, kaoszelmélet). Ez viszont nem jelenti azt,

hogy a dolgok nem előre meghatározottak, csupán azt, hogy mi nem tudjuk megjósolni, hogy ilyen esetekben mi fog történni. Másik ellenvetés, hogy a mikrovilág részecskéi, például egy elektron nem rendelkeznek egy időpillanatban egyértelműen meghatározott pozícióval és sebességgel, ezeket csak bizonyos valószínűséggel ismerhetjük meg a Heisenberg-féle határozatlansági reláció értelmében. Akik számára a determinisztikus világkép riasztó, azoknak ez jelenti a reményt, hogy a világ nem determinista.

Akár determinisztikus tehát a világ, akár nem, mindenképpen beszélhetünk véletlenről (csak az mást jelent az egyik és a másik esetben):

1. Egy dobókocka feldobásakor a Newton-törvények szerint történik minden, és az eredmény már az eldobáskor meghatározott, mégsem tudjuk, hogy milyen szám fog kijönni, mert nem áll elegendő információ a rendelkezésre például a kezdeti helyzetről és a sebességről (*Prékopa*, 1980). Ilyenkor szubjektív véletlenről beszélhetünk: azért nem tudjuk az esemény kimenetelét megjósolni, mert nem tudunk elegendő információt gyűjteni, a feltételek kis változásait figyelembe venni, vagy azért, mert a tudásunk részleges.
2. Bizonyos esetekben, például a mikrovilágban eleve csak valószínűségi kijelentéseket tehetünk. A bizonytalanság a világ egy részének sajátja, nem a mi információhiányunk vagy részleges tudásunk eredménye. Beszélhetünk tehát objektív véletlenről is, például a radioaktív atommagok bomlása esetén.

A matematikában, a valószínűség-számításban a fenti, kétféle véletlent nem különböztetik meg egymástól, hiszen gyakorlatilag mindegy, hogy egy kockadobás eredménye elvileg megjósolható lenne-e a kocka és a környezet fizikai jellemzőinek tökéletes ismeretében. Így összefoglalóan véletlenszerű vagy sztochasztikus eseményekről beszélnek, megkülönböztetve őket a determinisztikus eseményektől, amilyen például egy test leesése, ahol előre leírható a mozgás lefolyása.

A filozófia valószínűség-értelmezései és a valószínűségi gondolkodás kutatásának kapcsolata

A valószínűségi gondolkodás vizsgálata során az egyik legalapvetőbb a valószínűségek megbecslése és jövőbeli következtetések levonása. Ezeket a következtetéseket viszont nagyon eltérő módon hozzuk meg. Érdemes megvizsgálnunk az alábbi mondatokat, melyek mindegyike valamiféle bizonytalanságot fejez ki:

„Mekkora eséllyel nyeri meg a Szeged a bajnokságot?”, illetve „Mekkora eséllyel nyeri a Szeged a bajnokságot Poldi bácsi szerint?”

„Egyre valószínűbb a Higgs-bozon létezése.”

„Inkább a 32-est érdemes a lottón megtenni, mint a 35-öst, ha eddig kevesebb szer hűzták ki?”

Ezek a mondatok nagyon eltérőek. Az első esetben személyes megítélással mondhatunk egy 0 és 1 (vagy 0 százalék és 100 százalék) közötti számot, ami mindenkinél más és más lesz, a sportbéli tapasztalattól is függően. A Higgs-bozon vagy létezik, vagy nem, létezésének valószínűsége 0 vagy 1, a jövőben majd kiderül, hogy melyik. A róla szóló mondat „valami olyasmit” fejez ki, hogy a téma kutatói egyre több, de még nem elégséges tapasztalattal rendelkeznek, melyek Higgs elméletével összevágnak. Vagyis a valószínűség az elmélet és annak nyilvánvalósága közötti kapcsolat (*Hacking*, 1975). A lottó esetén bármelyik szám ugyanakkora eséllyel lesz jövő héten a kihúzottak között (ez az

esély a klasszikus lottó esetén $1 - \frac{\binom{89}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{5}{90} = 0,05$, az eredményt a matematika egyik ága,

a valószínűség-számítás segítségével számoltuk ki).

Láthatjuk, hogy csak az utolsó esetben ad segítséget a matematika. Igaz ugyan, hogy a fogadóirodák a mérkőzések lehetséges eredményei valószínűségeinek becslésére és ebből az oddsok meghatározására rendkívül komoly matematikai, statisztikai és informatikai apparátust használnak, Poldi bácsi esetén viszont erről nem beszélhetünk. A valószínűség (esély) fogalmát nem azonosíthatjuk tehát semmilyen módon a – többek között – Pascal és Fermat, valamint Kolmogorov által 1654-et követően, illetve 1933-ban megalkotott valószínűség-fogalommal, amely semmit nem tud (bár nem is akar) mondani a fenti három eset közül kettőben.

A probléma feloldására a filozófia többféle valószínűséget különböztet meg. Először is beszélhetünk objektív és szubjektív valószínűségről. Az objektív valószínűség esetén a valószínűség a külvilág objektív eseményeinek tulajdonsága. Ezzel dolgozik a matematika. Amennyiben egy valószínűség nem ismert, akkor a relatív gyakoriság ad rá jó becslést megfelelő számú kísérlet esetén. Az objektív valószínűség független a megfigyelő elvárásaitól és hiteitől. A szubjektív valószínűség Ramsey (1926), de Finetti (1937) és Savage (1954) nevéhez fűződik. Ebben a felfogásban a valószínűség egy elmeállapot tulajdonsága (Szabó, 2013), a külvilág eseményei észlelésének hatására az elmeállapotra jellemző tulajdonság, másképp fogalmazva: az elme hiteinek mérőszáma. De Finetti egészen addig élesítette elméletét, hogy szerinte „a valószínűség nem létezik”, ami alatt azt értette, hogy az objektív valószínűség nem létezik (Nau, 2001). Ramsey így ír a szubjektív valószínűségről (idézi: Szabó, 2013): „Egy személy hite mérésének legősibb módja az, hogy fogadást ajánlunk neki, és megnézzük, hogy melyek azok a fogadási arányok, amelyeket elfogad [...] Mindahányszor kimegyünk az állomásra, fogadunk, hogy a vonat valóban jár.” (Ramsey, 1926) A szubjektív valószínűség más és más az egyes emberek esetén ugyanarra az eseményre vonatkozóan. Ha egy hófúvásos téli napon Győrből vonattal utazó barátunkat várjuk a veszprémi pályaudvaron, és szeretnénk megtudni, hogy mekkora eséllyel késik egy óránál többet a vonat, nyilván más-más szubjektív valószínűséget kapunk, ha a vonatvezetőt, a barátunkat, a zirci állomásfőnököt vagy a budapesti irodában dolgozó telefonos információ-szolgáltatót kérdezzük meg. A fogadások (például a Tippmix esetén) épp azért jöhetnek létre, mert a szereplők az adott eseményt más-más szubjektív valószínűséggel (és emiatt más-más oddsszal, szubjektív várható értékkel) ítélik meg.

Az „egy nő nagyobb valószínűséggel él 70 évet, mint egy férfi” mondatban az objektív valószínűség szerepel, míg a „ha három csatárral játszunk, nagyobb eséllyel nyerünk, mint kettő esetén” kijelentés a szubjektív valószínűségekre példa.

Van egy harmadik valószínűség-felfogás is: a Keynes-féle logikai valószínűség (Keynes, 1963). Keynes Leibniz felvetéseit követve a valószínűséget a racionális hit fokának (‘degree of rational belief’) nevezi. „Minden kijelentés igaz vagy hamis, de a róluk alkotott ismeretünk körülményeinktől függ. Gyakran elégséges arról beszélni, hogy a kijelentések biztosak vagy valószínűek.” (Hársing, 1971) Például: „a vizsgálatok szerint nagyon valószínű, hogy létezik a Higgs-bozon” állítás a logikai valószínűséghez tartozik.

Más-más jelölést vezettek be a három valószínűség-típusra, az objektív valószínűsége: ch (‘chance’), a szubjektív valószínűsége: cr (‘credence’), a logikai valószínűsége: lo .

Kérdés tehát, hogy amikor a valószínűség-fogalom kutatásáról beszélünk, a három említett valószínűség-értelmezés közül melyiket vizsgálja a kutató. Egyes kutatásokban a szisztematikus gondolkodás és a matematizálás vizsgálata kerül a középpontba. Más kutatókat az érdekli jobban, hogy a személyiség mikor érez rá, korántsem ésszel és logikusan, sokkal inkább az addigi élettapasztalatok és intuíción alapján arra, hogy egy adott helyzetben milyen döntést érdemes hoznia. Ők a szubjektív valószínűséget vizsgálják. A logikai valószínűség vizsgálatára a gyerekek esetén nem kerül sor, mivel komplex rendszerek és elméletek ismeretére lenne hozzá szükség.

A fentiek felül jó néhány valószínűségfogalmat értelmeznek még (Szabó, 2013; E. Szabó, 2002; Gilles, 2000), de ezek témánk szempontjából nem fontosak.

A valószínűségi gondolkodás kutatása – történeti áttekintés

A valószínűségi gondolkodás kutatása ma legalább három nagy területre koncentrált. A történeti áttekintést követően könnyen megérthető, hogy miért van ez így.

A rendszerező és a szisztematikus gondolkodás vizsgálata

A valószínűségi gondolkodás kutatása az 1940-es évekre nyúlik vissza. Az ezt követő mintegy harmincöt évben a kutatások leginkább arra irányultak, hogy felmérjék, a gyerekek mennyire képesek szisztematikusán feltérképezni, hogy egy jelenség eltérő kimenetelei, ingadozásai milyen okokkal magyarázhatók. A kutatások nagy szerepet tulajdonítottak a rendszerezésnek és a kombinatorikus gondolkodásnak. Az úttörő két genfi kutató volt, akik hat kísérletet folytattak le a valószínűségi gondolkodással kapcsolatban (Nagy, 2006). Módszerük klinikai módszer néven lett ismert (*Piaget és Inhelder, 1951*). Minden korosztállyal ugyanazokat a kísérleteket végezték el, az életkori sajátosságokat és különbségeket nem vették figyelembe. Egyik kísérletükben (*Piaget és Inhelder, 1955*) különböző méretű és anyagú golyókat gurítottak, a golyók a gurítások feltételeinek eltérése miatt mindig máshol álltak meg. A gyereket az eltérés okairól és a következő megállások helyének előrejelzéséről kérdezték. Vizsgálataikban erős életkorhoz kötöttséget feltételeztek, illetve találtak, és ez a felfogás egészen az 1990-es évek végéig széles körben elfogadott volt. A fenti kísérletben azt találták, hogy a 7–8 éves kor alatt válaszadók zöme szerint „bárhol megállhat” a golyó, míg 15–16 éves korra eljutottak a valószínűség-eloszlás helyes megbecsüléséig és a megállás helyére vonatkozó pontos előrejelzések, konfidencia-intervallumok megadásáig.

Modelljük szerint 7–8 éves kor alatt nem beszélhetünk valószínűségi gondolkodásról, ebben a stádiumban a gyerek nem képes különbséget tenni sem a lehetséges és a szükséges események között, sem a lehetetlen (soha be nem következő) és biztos (mindig bekövetkező) események között, ezért ítéletét nem nevezhetjük valószínűségi ítéletnek. A gyerek 7–8 éves kor után nem csodálkozik a véletlen eltéréseken, sőt az előrejelzéseiben figyelembe is veszi azokat. Kezdetben a kísérleti személyeket zavarja a véletlen megjelenése. 9 éves kor körül viszont sok próbálgatást követően már okokat keresnek az ingadozások magyarázatára, és előrejelzéseket is adnak. Körülbelül 11–16 éves korra viszont a körülmények szisztematikus megvizsgálásával mondanak valószínűségi ítéleteket. A gyerek konkrét esetekben felismeri, hogy bizonyos rendszerek valószínűségi alapon működnek. Az ingadozások okait keresi, megkülönbözteti a hipotézis szempontjából kedvező és kedvezőtlen eseteket, és az összes lehetőséget (kombinációt) megvizsgálja. Ebben segítségére van az, hogy a kombinációs készség e stádiumban gyorsan fejlődik.

A modell lényegében az alapján alkot ítéletet, hogy mennyire képes a gyerek szisztematikusán dönteni. A kutatók számára fontos volt, hogy a természettudományos megismerés általános folyamatában milyen szintre jut el a válaszadó. Ez a folyamat leegyszerűsítve a következő: megfigyelés → kérdésfeltevés (a vizsgálatokban a vizsgálatvezető tette fel őket a vizsgált személy reakcióihoz alkalmazkodva) → hipotézis → előrejelzés → adatgyűjtés → értékelés. A kérdés tehát egyrészt az volt, hogy a gyerek mennyire viselkedik „kis tudósként”, milyen messze jut el a fenti rendszerben, másrészt az, hogy objektív valószínűségeket mennyire képes megbecsülni. Fontos volt a kutatók számára, hogy válaszaiknak indoklásában mennyire következetes a gyerekek. Kiderült, hogy gondolkodása 6–7 éves kor előtt különböző szempontok között ugrál: néha illogikus, például a piros húzást várja, mert az a kedvenc színe, de a következő kérdés hatására felülbírálja előző véleményét. Erről a nem stabil, nem szisztematikus gondolkodásról mondták

végül, részben önmagukat is az ítéletalkotás részévé téve, hogy nem nevezhető valószínűségi gondolkodásnak.

A modellt az erős szisztematizálás miatt több kritika érte. Az eredmények nem mondtak semmit arról, hogy a gyerek a korábbi tapasztalataira támaszkodva mennyire találná fel magát az életben egy valószínűségi helyzetben, hiszen nem is ezt vizsgálták, nem ez volt a kutatók felfogása a valószínűségi gondolkodásról. Gigerenzer (1991) szerint a vizsgálati helyzet és az életben megszokott döntési helyzetek nagyon eltérőek voltak, a kísérleti összeállítások nem voltak életszerűek, és az instrukciók sok esetben nem voltak egyértelműek. Yost és munkatársai (1962) megállapították, hogy a vizsgálatok alapja a gyerek verbális képessége volt, és a gyerekek sokkal többet tudnak, mint amennyit el tudnak mondani (*Schlottmann és Wilkening, 2011*). Ezért az 1970-es évektől kezdve sokkal inkább azt kezdték vizsgálni, hogy a gyerekek mit csinálnak, semmint hogy mit mondanak (*Gopnik, 2010*). Ugyancsak bírálták a modell éles korhoz kötöttségét.

A kritikák hatására a későbbi kutatók a nem-szisztematikus válaszokat is vizsgálni kezdték, a nyelv szerepét minimálisra csökkentették, a gyerekeket cselekvő helyzetbe helyezték a szemlélődő-válaszadó helyzet helyett, és életszerűbb helyzetekben próbálták vizsgálni a gyerekek gondolkodását.

Az intuíció és a szubjektív valószínűség fogalmának megjelenése

Gondolkodásunk nem minden esetben racionális, még a nagy sakkozóké sem. Mihail Tal, a sakkozás nyolcadik, 1960–61 közötti világbajnoka leír egy esetet. Egy felnőttkori partiban egy gyerekkorában megismert vers hatására egy víziló jelent meg előtte, amit ő helikopterekkel és csigákkal akart a versbéli mocsárból kimenteni. Közél háromnegyed órai „gondolkodás” után hirtelen világos lett számára, hogy mit kell lépnie az adott állásban (*Kasparov, 2008*). Miután a Piaget-modell elsősorban szigorúan logikus válaszokat ismert csak el valószínűségi gondolkodásként, Fischbein (1975) új koncepcióval állt elő. Piaget modelljéhez nagyon hasonlóan szakaszos fejlődésről írt, és azokat életkorokhoz kötötte, némileg másképp, mint az előző modell. Három fejlődési szakaszt különböztetett meg: iskola előtti, konkrét műveleti és formális műveleti szakaszt, ami szerinte a 7 éves kor előtti, 7 és 12 éves kor közötti és 12 éves kor utáni korszakot jelenti. Igazi koncepcióváltás, hogy véleménye szerint a valószínűség-fogalom már az első periódusban kialakul a hétköznapi tapasztalatok miatt, amit intuíciónak is nevezhetünk. Fischbein mindegyik korszakot négy szempontból jellemezte, ezek: az intuíció a véletlenről, a valószínűség becslése, az oktatás hatása és a kombinatorikus műveletek. Kutatásai központjában az intuíció szerepe állt a matematikai és a tudományos gondolkodásban, de vizsgálta a valószínűségi gondolkodás fejlesztését, az oktatás hatását a fejlődésre (*Greer, 2001*), valamint azt is, hogy melyik az az időszak, amikor a valószínűségi gondolkodás fejleszthető.

Fő érdeme, hogy vizsgálni kezdte a véletlenről való intuíciót. Mint láttuk, a filozófiában a szubjektív valószínűség Ramsey (1926), de Finetti (1937) és Savage (1954) munkássága kapcsán ekkor már széles körben ismert fogalom volt, de Fischbein esetén jelent meg először a pszichológiai-pedagógiai kutatásokban. Szerinte meg kell különböztetni a valószínűség-fogalmat mint az arányok pontos és világos kiszámítását a valószínűség intuíciójától, azaz a valószínűség szubjektív becslésétől. Az utóbbi információkon és mentális műveleteken alapul, illetve közvetlen és általános előrejelző funkciókon (*Fischbein és Grossman, 1997*). Amikor egy feladatban speciális utasítások nélkül a valószínűségekre vonatkozó válaszok nagyon megközelítik az események valószínűségét (vagyis az objektív és a szubjektív valószínűség közel van egymáshoz), feltételezhető, hogy a személy rendelkezik egy bizonyos intuícióval a valószínűségről és a véletlenről. Fischbein észrevette azt is, hogy bizonyos, a valószínűséggel összefüggő feladatok ese-

tén gyakorlás után a gyerekek sokkal jobb eredményt érnek el, mint előtte (*Fischbein és Gazit, 1984*), ezért bevezette az elsődleges és másodlagos intuíció fogalmát. Az előbbi olyan szellemi vívmány, amely személyes tapasztalatokból származik, az utóbbi a rendszeres oktatásból.

Vizsgálta a valószínűségi döntésekkel kapcsolatos tipikus téveszméket is, amelyek az életkorral is kapcsolatban vannak (*Fischbein és Schnarch, 1997*), az okuk pedig az, hogy kevés valószínűségi tapasztalatot szerzünk az életben (*Fischbein, 1987*).

Új módszerek, több szempontú vizsgálatok

Az eddig ismertetett időszakban az egyéni megfigyelés és az interjú volt az elterjedt vizsgálati módszer, melyet klinikai módszernek neveztek el. A '80-as évektől kezdve széles körben elterjedt a feladatlapos vizsgálat. Elsőként Green (1983) alkalmazta mintegy háromezer, 11 és 16 év közötti diák valószínűségi gondolkodásának vizsgálatokor. A véletlen megjelenése, az eseménytér, a legvalószínűbb esemény, a függő és független események részterületeit vizsgálta. Ezek a valószínűség-számítás központi fogalmai, és a matematika súlyának felértékelődését mutatják a valószínűségi gondolkodás vizsgálata során, megelőlegezve a későbbi modellekben betöltött központi szerepüket. Az angliai East Midland középiskoláiban 1978 és 1981 között végzett kutatás során a tanulók két, egyenként egy órás tesztet kaptak, amelyek a valószínűség-konceptiójukat ('probability concepts') és az általános gondolkodási képességüket ('general reasoning ability'; például függvények, vektorok, pozitív és negatív számok, algebra) vizsgálták (*Green, 1983*). A gondolkodási képesség alapján öt csoportba osztották a tanulókat (a legjobb 10 százalék, majd 20 százalék, 40 százalék, 20 százalék, végül a leggyengébb 10 százalék), és csoportonként vizsgálták a valószínűség-konceptió fejlődését. Minden csoportban növekedést találtak a csoporton belül az életkor függvényében. Magasabb szintű gondolkodási képességhez magasabb átlagpontszámot kaptak a valószínűségi gondolkodás esetén is (a fiúknál mind az általános gondolkodási képességnél, mind a valószínűségi itemeknél magasabbat, mint a lányoknál, de a különbség nem nőtt az évek során a nemek pontszáma között). A valószínűségi gondolkodás pontszámának és az életkornak a kapcsolatát közel lineárisnak találták mindegyik kategóriában. A csoportok közötti különbségek nem lettek nagyobbak az évek múltával: az egyenesek meredekségei közel azonosak voltak, csupán a leggyengébbek fejlődése indult nagyon lassan, de később itt is a többi csoporthoz hasonló javulás volt tapasztalható. A vizsgálatban a piaget-i szinteket is használták, de a valószínűségi itemek esetén nem tapasztaltak semmilyen csoport esetén sem életkorhoz köthető hirtelen javulást, átrendeződést.

Azt találták továbbá, hogy a valószínűségi itemek általánosságban nem tartoztak a nehezek közé. A feladatokban a valószínűség-számításból ismert témák szerepeltek (Galton-deszka, véletlen vagy nem véletlen fej-írás sorozatok összehasonlítása, dobások és húzások, és így tovább). Például: 5. item: Ötször feldobtuk egy érmét, és mind az ötször fej jött ki. A hatodik dobásnál minek nagyobb az esélye? a) A fejnek. b) Az írásnak. c) Egyenlők az esélyek. d) Nem tudom. 6. a) item: Az át nem látszó A dobozban 3 fekete és egy fehér, az át nem látszó B dobozban 2 fekete és egy fehér golyó van (rajzok is vannak az itemnél). Egy golyót húzhatsz, ajándékot kapsz fekete golyó húzása esetén. Melyik dobozt választanád?

A feladatok tehát az objektív valószínűség vizsgálatára vonatkoztak, a valószínűségek összehasonlítása (például a 6. a) item esetén) és a függetlenség vizsgálata (például az 5. item esetén) is szerepelt a feladatok között. Egyetlen feladat sem szerepelt viszont, amelyben szubjektív valószínűsége, az életben előforduló helyzetekre, tapasztalatokra kérdeztek volna rá.

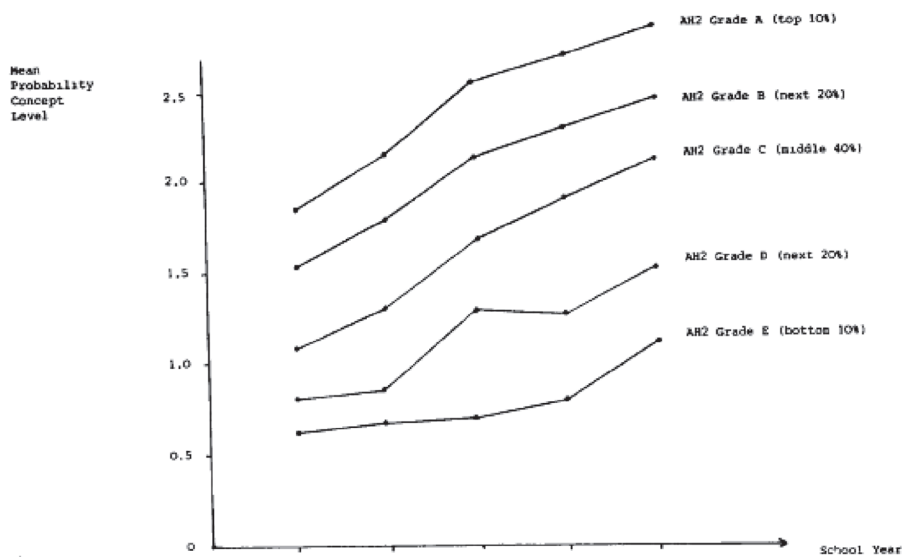


Fig 1 Mean Probability Concept Level profiles by School Year and general reasoning ability.

2. ábra. Az egyes csoportok valószínűségi gondolkodásának fejlődése (Green, 1983)

Életkor-független szintetizáló modellek

A valószínűségi gondolkodás kutatásának története során szinte végig jelen volt a cél, hogy az iskolában is fel lehessen használni az eredményeket. Ezt láttuk már Fischbeinnél is, de a Piaget-modellre is építettek programokat a matematika és azon belül a valószínűség tanítására. Graham A. Jones fiatal kutatóként Fischbeinhez fordult a gyerekek valószínűségi gondolkodásával kapcsolatos kérdésekkel. A kérdések részben a saját, részben Fischbein munkáira vonatkoztak. Kérdései megválaszolása mellett azt a tanácsot kapta, hogy tanítsa a valószínűséget, ugyanis a valószínűség elméleti és gyakorlati oldalai miatt ez különleges kihívások elé állítja őt (Jones, 2005). Nem véletlen tehát, hogy Jones modellje (Jones, 1997), majd ennek Polaki (2002) által továbbfejlesztett változata szorosan kapcsolódik az iskolában tanított valószínűség-számításhoz. Ez utóbbi ma a valószínűségi gondolkodás legelfogadottabb modellje. Polaki öt szempontból elemzi a gyerekek valószínűségi gondolkodását. Szerinte az eseménytér, az események valószínűsége, a valószínűség összehasonlítása, a feltételes valószínűség és a függőség/függetlenség a legfontosabb vizsgálandó fogalmak. Ezek a vizsgálati szempontok matematikai fogalmak, a valószínűség-számítás definiálta és használja őket, ezért az objektív valószínűséghez köthetők. Polaki (2002) négy szintet javasolt a valószínűségi gondolkodás leírására. Jones modelljét követve, ahol ez elsőként jelent meg, a szintek már nem kötődnek életkorokhoz – szemben Piaget és Fischbein modelljével. Az első, szubjektív szinten a gyerekek a legvalószínűbb/legkevésbé valószínű eseményt személyes ítélet alapján választják ki, például „a piros fog kijönni, mert ez a kedvenc színem”. A második, átmeneti szinten a gyerek kvantitatív döntéssel választja ki a legvalószínűbb/legkevésbé valószínű eseményt, de ez gyakran nem helyes, és szubjektív elemekkel keveredik.

A harmadik, informális mennyiségi szinten a gyerek képes számolással kiválasztani a legvalószínűbb/legkevésbé valószínű eseményt. A negyedik, numerikus szinten pontosan kiszámolják, és össze tudják hasonlítani a valószínűségeket.

Így Polaki modellje egy 4x5-ös táblázatban foglalható össze (1. táblázat, lásd: Nagy, 2006).

1. táblázat. Polaki matematikai alapú modelljének összefoglalása (Nagy, 2006):

Összetevő	Eseménytér	Események valószínűsége	Valószínűségek összehasonlítása	Feltételes valószínűség	Függőség
<i>Fejlettségi szint</i>					
Szubjektív	Egydimenziós eseményekre a lehetséges kimenetek hiányos felsorolása.	Szubjektív alapon határozza meg a legkevésbé és leginkább valószínű eseményeket. Determinisztikus törvényszerűségeken alapulva indokol.	Szubjektív alapon hasonlítja össze két eseménytérbeli kimenetel valószínűségét. Nem tud különbséget tenni az igazságos és igazságtalan között.	Szubjektív alapon értelmezi a visszatevés és a visszatevés nélküli eseteket. Determinisztikus következtetéseket hoz.	Meggyőződése, hogy az egymást követő események hatással vannak egymásra. Feltételezi, hogy tudjuk kontrollálni a kísérletek kimenetelét.
Átmeneti	Egydimenziós esetekben az összes kimenetelt megjósolja.	A legkevésbé és leginkább valószínű eseményeket mennyiségi alapon indokolja (nem mindig helyesen). A bizonytalanságot nem mennyiségi alapon értelmezi.	A különböző valószínűségeket mennyiségi alapon hasonlítja össze (nem mindig helyesen). Rész-rész összehasonlításokat végez.	A már ismert helyzetekben felismeri, hogy vannak olyan események, melyek valószínűsége visszatevés nélküli helyzetekben megváltozik.	Felfedezi, hogy az események lehetnek függetlenek és függők. Korábbi kísérletekre alapozva megjósolja a következő kimenetelt.
Informális mennyiségi	Felsorolja kétdimenziós esetek kimeneteleit, részben kifejtési stratégiákat használva.	A legkevésbé és leginkább valószínű eseményeket mennyiségi alapon helyesen indokolja. Mennyiségi alapon hasonlítja össze a valószínűségeket.	A különböző valószínűségeket mennyiségi alapon helyesen hasonlítja össze. Az igazságos és igazságtalan között mennyiségi alapon tesz különbséget. Rész-egész és rész-rész összehasonlításokat végez.	Minden esetben felismeri, hogy visszatevés nélküli esetekben az események valószínűsége megváltozik. Ki is tudja számítani ezeket a valószínűségeket.	Visszatevés és visszatevés nélküli esetekben is felismeri a függő és független eseményeket. Használja a komplement esemény fogalmát.
Numerikus	Kétdimenziós esetek kimeneteleit szisztematikusan, kifejtési stratégiát használva sorolja fel.	A legkevésbé és leginkább valószínű eseményeket egy- és kétdimenziós esetekben mennyiségi alapon helyesen indokolja. Az eseményekhez numerikus valószínűségeket rendel, és ezeket össze is tudja hasonlítani.	Az eseményekhez numerikus valószínűségeket rendel, és ezeket helyesen hasonlítja össze.	Visszatevés és visszatevés nélküli esetekben kiszámítja a valószínűségeket, és ezeket mennyiségi alapon össze is hasonlítja.	Mennyiségi alapon tesz különbséget a függő és független események között.

Ez a modell hangsúlyozza először az eseménytér fontosságát. Az eseménytérrel kapcsolatban már Green, később Jones kutatásai is megállapították, hogy az összes lehetséges kimenetel meghatározása nehézséget jelent a diákoknak, még a dobókocka feldobása esetén is. Ezért egy kísérlet kimenetelét sokszor nem az összes elemi esemény figyelembevételével tippelik meg, hanem determinisztikus úton.

A modell a szubjektív szót (szubjektív szint) inkább negatív értelemben használja: „aki még nem képes valamire”, ezzel a Piaget-i hagyományt követi, szemben Fischbeinnel, ahol pozitív jelentése volt: „igaz, hogy valamit nem tud pontosan indokolni, mégis képes rá”.

Észrevehetjük, hogy a modell teljes egészében matematikai alapú, tehát az objektív valószínűséggel azonosítja a valószínűség fogalmát.

Kutatási irányok a valószínűségi gondolkodással kapcsolatban

A valószínűségi gondolkodással kapcsolatban különböző irányokban folynak a kutatások:

1. Már Fischbein bizonyította kutatásai során, hogy az intuíciónál egészen fiatal korban meg tudnak oldani a gyerekek valószínűségi feladatokat. A kutatások egyik része épp azt vizsgálja, hogy mikor figyelhetjük meg legelőször az ilyenfajta gondolkodás megjelenését.
2. A Polaki-modell egy 4x5-ös mátrixszal írható le. Ráadásul – bár életkortól független modellről van szó – bármilyen korcsoporttal végezhető vizsgálat. Az ilyen típusú vizsgálatok matematikai alapúak, gyakran szerepelnek bennük golyóhúzások, kockadobások és valószínűségi stratégiai játékok. A kérdések az objektív valószínűséggel kapcsolatosak.
3. A szubjektív valószínűség kutatása széles körben elterjedt. Elsősorban ott alkalmazzák, ahol pszichológusok jelenléte meghatározó a kutatásokban. A gyerekekkel kapcsolatos kutatásokban ma még sokkal kisebb szerepet kap, mint a felnőttek esetén.

A valószínűségi gondolkodás első megjelenési formái

A videózás megjelenése a technikában és az 1970-es évektől a női pszichológusok részvétele a kutatásokban átalakította a korai gyerekkorról alkotott elképzeléseket. A gyerekek megfigyelése és a reakciók elektronikus rögzítése vált fontossá. A szemmozgás-vizsgálat, annak vizsgálata, hogy mennyi ideig néznek a babák valamit, a nézéspreferencia-vizsgálatok (mit néz inkább a baba), annak vizsgálata, hogy milyen interakcióban vannak a szülővel, mind-mind információt szolgáltatnak a kisgyerek világról. Egyes laboratóriumokban az agyhullámok vizsgálatával is foglalkoznak.

A képrögzítés segítségével derült ki, hogy a csecsemők egészen korán felismernek statisztikai mintázatokat, és (bizonyos értelemben) képesek a kisebb és a nagyobb valószínűségű dolgokat megkülönböztetni. Saffran (1996) nyolc hónapos csecsemők között kimutatta, hogy bizonyos szótagokat összetartozóbbak érznek, mint másokat. A habituáció jelenségét alkalmazta, vagyis azt a megfigyelést, hogy a sokszor érzékelt dolgok iránt elveszítjük érdeklődésünket, és kevésbé figyelünk rájuk. Ha a 'ba' szótagot gyakrabban követi 'ga', mint 'da', például háromszor annyi 'baga' hangzik el, mint 'bada', akkor az előbbi elveszti érdekességét. Saffran értelmetlen szavakat játszott le a gyerekeknek úgy, hogy bizonyos szótagok csak együtt fordultak elő (összetartoztak), mások nem. Ezek után a szavakat egyenként lejátszotta, és a reakciókat videóra rögzítette. Kiderült, hogy a ritkán hallottakat sokkal érdekesebbnek tekintették a nyolchónaposak, mint a

megszokottakat, azaz kialakult bennük valamiféle valószínűségi mintázat arra vonatkozóan, hogy mely szótagok tartoznak össze.

Fei Xu (2008) szintén nyolc hónapos csecsemőket vizsgált. Öt golyót vett elő egy dobozból, amelyben 5 fehér és hetven piros golyó volt. A doboz átlátszó volt, ezért a labdákat a gyerekek is látták. A gyerekek reakcióját videóra rögzítették. A gyerekek rövidebb ideig nézték, azaz nem lepődtek meg, amikor négy fehér és egy piros golyót vett elő a kísérletvezető (ennek esélye $5 \cdot \frac{70}{75} \cdot \frac{69}{74} \cdot \frac{68}{73} \cdot \frac{67}{72} \cdot \frac{5}{71} \approx 0,2655$), viszont hosszabb ideig néztek, azaz meglepődtek, amikor – látszólag véletlenszerűen – egy fehér és négy piros került elő (ennek esélye $5 \cdot \frac{5}{75} \cdot \frac{4}{74} \cdot \frac{3}{73} \cdot \frac{2}{72} \cdot \frac{70}{71} \approx 0,0000228$).

A kísérletet hasonló összeállítással megismételték (Denilson, Reed és Xu, 2012), ezúttal 4 és fél és 6 hónap közötti csecsemőkkel. Azt találták, hogy a 6 hónapos babák hosszabb ideig nézik a valószínűtlenebb eseményt, azaz bizonyos valószínűség-képük van már. A 4,5 hónaposak körében viszont nem figyelték meg ezt a jelenséget. Valószínű, hogy ebben az időintervallumban jelenik meg a valószínűségi gondolkodás első formája.

A vizsgálatok egy másik típusa szerencsejátékot használt: lottó-gépet mutattak 12 és fél hónapos gyerekeknek (Teglas, 2007). A gépben három egyforma alakú és színű, és egy ezektől eltérő tárgy volt. A kísérletvezető letakarta a gépet, és egyet kisorsolt a négy tárgy közül. A gyerekek hosszabb ideig figyeltek, amikor az egyetlen, valószínűtlenebb tárgyat sorsolták ki. A kísérlet azért is figyelemreméltó, mert nem sok korábbi sorsolás eredményének ismeretében viselkedtek így, hiszen egyszeri eseményről volt szó. Tehát a 12 és fél hónapos gyerekeknek saját valószínűségi elképzelésük volt. Bonatti (2008) az előző vizsgálatbeli 3:1 aránnyal, de 16 (12 egyforma és 4 ugyancsak egyforma, de az előbbiektől eltérő) objektummal végezte el a kísérletet, szintén 12 és fél hónaposakkal. Meglepő módon a babák nem tudták az eltérő valószínűségeket megkülönböztetni, nem nézték hosszabban a kisorsolt kevésbé valószínű tárgyat.

Denison és Xu (2009) ugyanakkor úgy találták, hogy 14 hónapos gyerekek már képesek egyetlen esemény valószínűségének megjóslására is. Teglas és Bonatti vizsgálatától teljesen eltérő kísérleti helyzetben vizsgálták a gyerekeket, színes nyalókákat használva. Azt tapasztalták, hogy a 14 hónapos gyerekek többsége képes volt azt a bögrét kiválasztani, amelyben nagyobb valószínűséggel volt az a nyalóka, amely neki jobban tetszett.

Óvodásokat vizsgált Schulz és Bonawitz (2007), és bebizonyították, hogy a kisgyerekek már értik a véletlen és a biztos közötti különbséget, és akkor is vizsgálják az ok-okozati összefüggéseket, amikor játszanak. Óvodásoknak (egyesével) egy-egy kétfogantyús játékot mutattak. Az egyiknél egy kacska, illetve egy báb bukkant fel aszerint, hogy a bal vagy a jobb fogantyút nyomták-e meg. A másik esetén mindkettő megjelent, ha egyszerre nyomták meg a két kart, de nem volt ok-okozati összefüggés egy-egy kar megnyomása és egy-egy tárgy megjelenése között. A kísérletvezetők engedték, hogy a gyerekek szabadon játszanak, figyelve a tevékenységüket. Azt tapasztalták, hogy az első, determinisztikus játékkal lényegesen kevesebb időt töltöttek el, mint a másodikkal. A gyerekek tehát megértették a biztos és a véletlen közötti különbséget. A véletlen jelenség izgalmasabbnak mutatkozott. A váratlan és szokatlan iránti érdeklődés miatt ismerik meg a világ új és új arcát minden nap.

Szintén óvodásokat vizsgált Kushnir és Gopnik (2007). Sárga, illetve kék tömböt tettek egy gépre többször egymás után. A gép véletlenszerűen világítani kezdett, a sárga esetén háromból kétszer, a kék esetén hatból kétszer. Ezt követően a tömböket az óvodás gyerekeknek adták, és arra kérték őket, hogy világítson a gép. A gyerekek nagyobb része a sárga tömböt helyezte a gépre, ami valóban jobb választás, mert ennél nagyobb eséllyel világított a gép, mint a kéknél.

Kutatások az objektív valószínűséggel kapcsolatban

Napjaink valószínűségi gondolkodással kapcsolatos kutatásainak nagy része valamilyen matematikai módszert használ. A Polaki-modell mindegyik komponensét vizsgálják (eseménytér, az esemény valószínűsége, valószínűségek összehasonlítása, feltételes valószínűség, függőség/függetlenség). A modell feltételezi, hogy a gyerekek tisztában vannak azzal, hogy bizonyos kísérletek kimenetele a véletlenül múlik. A vizsgáltak egy része húzással, dobással, korongforgatással kapcsolatos, másik részében döntési helyzeteket vizsgálnak a döntésemélet eszköztárát felhasználva. A döntésemélet három alapfogalma a cselekedet, az állapot és a következmény. Ilyenkor a gyerek döntéséből következtetnek a valószínűségi gondolkodására. Döntéshozás esetén a vizsgálat általában egy interjúból is áll, ahol a gyereket döntésének okairól kérdezik, ebből következtetve arra, hogy a Polaki-modell melyik fejlettségi szintjén van. Például Mousoulides és English (2009) óvodások körében két fejlettségi szintet figyelt meg és írt le részletesen, a szubjektívét és az átmenetit. Az óvodások egy része mindkét szint jellemzőit produkálta, mások egy szinten leírt jellemzőket.

Az eseménytérrel kapcsolatos kutatások

Az elemi események felírása nem tartozik a fő kutatási irányok közé. A kutatók egyetértenek abban, hogy már a kimenetek felírása is sok esetben gondot okoz, és a gyerekek sokszor azt sem tudják felírni, hogy két kocka feldobása esetén 36 kimenetel van, az összegük felírása esetén csak 11, amelyek viszont már nem egyformán valószínűek (Bryant és Nunes, 2012). A problémák arra vezethetők vissza, hogy az eseménytér felírásához a gyerekeknek el kell képzelnie az összes lehetséges esetet (összeg esetén 2 és 11 között), majd az egy-egy ilyenhez tartozó összes lehetséges kimenetelt.

A valószínűségek becslésének és összehasonlításának vizsgálata

A kutatások zöme ezzel foglalkozik. Ilyenkor a gyerekek által várt eredményt egy vagy több – a kísérletvezető által ismert – objektív valószínűséggel hasonlítják össze. Az egyes események valószínűségének kiszámolására vonatkozó kérdések ritkán jelennek meg a vizsgálatokban, általában körülírják a kérdést. Mint már láttuk, Way (1998) egy dobozba három piros és egy kék macit tett, arra kérve a gyerekeket, válasszák ki, hogy milyen színű maci húzása valószínűbb, és indokolják meg a döntésüket. Ezzel két esemény valószínűségét kellett összehasonlítani. Annak eldöntésére, hogy két piros és hat kék golyó közül melyik valószínűbb, előbb egymáshoz hasonlítják a részeket a gyerekek (2:6), és csak a gondolkodás egy másik állomásán hasonlítják a részt az egészhez (Nunes és Bryant, 1996).

Döntési helyzetben vizsgálta a valószínűség kialakulását Falk és Wilkening (1998) is. Két átlátszó dobozban golyók voltak, az egyik színt „nyertesnek” nevezték. A játékszabály szerint a gyerek húzhatott egy golyót az általa választott dobozból (véletlenszerűen), a kísérletvezető kötelezően a másikkól (szintén véletlenszerűen). Azt tapasztalták, hogy a kisebbek (hat-nyolc évesek) inkább a kevésbé kifinomult, „egydimenziós” technikát használják (például csak a nyertes golyók számát veszik figyelembe), a nyolc-tíz évesek már többmindent (például a nyertes és nem nyertes golyók különbségét is), míg a tíz-tizenhárom évesek a legkifinomultabb stratégiát: a nyertes és nem nyertes golyók arányát. Dean és Mollaison (1986) is úgy találta, hogy az idősebb gyerekek nagyobb eséllyel használnak kifinomultabb stratégiákat. Hét-nyolc évesek brazil gyerekek dönté-

seit vizsgálta Spinillo (2002). Minden gyereknek három dobozt (egy készletet) mutatott, melyekben eltérő számú rózsaszín és kék golyó volt. Egy dobozt kellett választaniuk úgy, hogy egy golyót becsukott szemmel kivéve a húzás legnagyobb eséllyel legyen kék. Különböző nehézségű készletek álltak rendelkezésre (1., 2. és 3. típus). Az eredményeket a 2. táblázat foglalja össze.

2. táblázat. A helyes döntések átlaga négy kísérletből, korosztályonként és típusonként

Means of correct responses (out of four) with standard deviations in parentheses				
Age	Trials			Total
	Type 1	Type 2	Type 3	
7	3.85 (0.489)	3.50 (0.827)	2.75 (1.410)	3.36
8	4.00 (0)	3.90 (0.308)	3.70 (0.733)	3.86
Total	3.92 (0.350)	3.70 (0.648)	3.22 (1.209)	3.61

Az interjúk során kiderült, hogy a gyerekek négyféle stratégiát alkalmaztak, csupán a kedvezők számának figyelembevételétől (Strategy 1) a megfelelő arányok összehasonlításáig (Strategy 4) (3. táblázat).

3. táblázat. A megoldási stratégiák százalékos megoszlása életkoronként

Percentage of strategies by age and type of trials			
Strategy	Type 1	Type 2	Type 3
7 years			
1	9	0	13
2	0	25	0
3	57	36	57
4	34	39	30
8 years			
1	3	0	3
2	0	4	0
3	26	22	31
4	71	74	66

A 3. táblázat azt mutatja, hogy a nyolc évesek zöme a legmagasabb szintű stratégiát alkalmazta, még a legnehezebb, harmadik típusú készlet esetén is 2/3 részük döntött emellett.

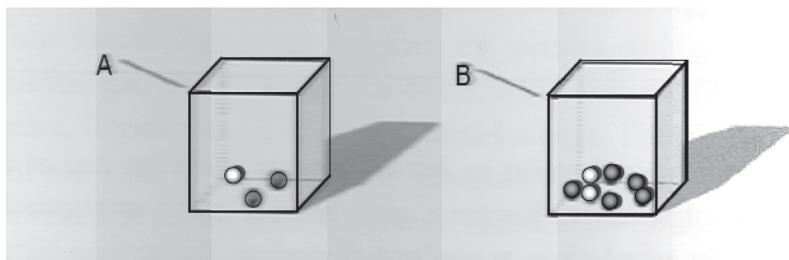
Way (1996) több játékot mutatott a 5–12 év közötti gyerekeknek, amelyekben például a legvalószínűbb húzást, a legnagyobb eséllyel nyerő autót (megforgatott színes kerékkel sorsolták ki, hogy melyik autó léphet egyet a táblán) kellett megmutatni. A gyerekeknek indoklást is kellett adniuk a választásukra. Azt tapasztalták, már az 5–6 évesek is 65 százalékos eredményt értek el, míg a 7–8 évesek 80 százalékos, a 9–10 és a 11–12 évesek 90 százalékos eredményt. Az indoklásoknál viszont a helyes válasz 45 százalék, 70 százalék, 88 százalék és 90 százalék volt, azaz a kisebbek (5–6 és 7–8 évesek) jobb eredményt értek el valójában, mint amit az indoklás alapján várni lehetett volna. Vagyis a valószínűség pontos megértése előtt már képesek voltak jó döntéseket hozni valószínűségi helyzetekben.

Hasonlóan jó eredményeket hozott Hodnik Čadež és Škrbec (2011) vizsgálata, akik szlovéniai gyerekeket figyeltek meg. Itt 14 évesen találkoznak először a valószínűséggel az iskolában. Két kérdéskört vizsgáltak: mennyire képesek különbséget tenni a gyerekek a biztos, lehetséges és lehetetlen között, illetve mennyire helyesen döntenek, ha feketét szeretnének húzni, de előtte két doboz közül kell választaniuk. Azt tapasztalták, hogy az

öt évesek fele (53,8, illetve 49,9 százalék), a nyolc évesek $\frac{3}{4}$ része (78,1, illetve 73,2 százalék) jól oldotta meg mindkét típusú feladatot.

Összekapcsolta a két konstrukciót (a valószínűség becslése és döntés a nyereségyért) Gonzalez és Girotto (2011), akik észak-olaszországi óvodásokat, iskolásokat (6, 8 és 10 évesek) és 19–23 éves fiatalokat vizsgáltak. A vizsgálatok egyénileg történtek, és mintegy 15 percet vettek igénybe. Egy át nem látszó dobozba eltérő színű játékpénzeket tettek: 15–1, 7–1, 3–1, 4–2, illetve 8–2 darabot, amit a gyerekek minden esetben tudtak. Kettőt húztak egyszerre, majd megkérdezték őket, hogy ugyanolyan lesz-e szerintük a két húzás. Ha eltaláltak, ajándékot kaptak. Természetesen az $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb esélyű eseményre volt érdemes fogadni, hiszen csupán két esemény valószínűségét kellett összehasonlítaniuk. Azt tapasztalták, hogy a 8 és 10 évesek teljesítménye elérte a fiatal felnőttekét, és a stratégiájuk közel volt az optimálishoz.

Meglepő eredményt hozott 2004-es PISA-felmérés egyik kérdésének eredménye (3. ábra): Melyik urnából húznál becsukott szemmel, ha fehéret szeretnél?



3. ábra. PISA-feladat

A 15 éves német diákok csupán 27 százaléka adott helyes választ erre a kérdésre (Martignon és Krauss, 2009). Ez ellentétben áll Piaget és Inhelder (1951), Fischbein és Gazit (1984), valamint Falk és Wilkening (1998) azon megállapításával, hogy idővel mindenki egyre jobb eredményt ér el a valószínűség kiszámolása terén, és Spinillo (2002) vizsgálataival is. A különbség abból is adódhat, hogy míg a fenti vizsgálatok esetén csupán valószínűségi helyzetben vizsgálták a gyereket, addig a PISA-tesztben sokféle feladat szerepel, és nem biztos, hogy a gondolkodásunkat könnyű egy „determinisztikus” feladatról egy véletlenszerűre átállítani. Ennek eldöntése viszont újabb vizsgálatokat igényel.

A feltételes valószínűséggel és a függőséggel kapcsolatos kutatások

Említettük, hogy már Green (1983) felmérése is tartalmazott a függetlenséggel kapcsolatos itemet („Ötször feldobtuk egy érmét, és mind az ötször fej jött ki. A hatodik dobásnál minek nagyobb az esélye?”). A vizsgálatok szerint többféle hibás stratégia is van: sokan azt gondolják, hogy egy pénz ismételt feldobásakor az ellenkező jön ki nagyobb eséllyel (‘negative recency effect’), mások úgy vélik, hogy ugyanannak nagyobb az esélye (‘positive recency effect’). Gilovich (1985) szerint a legtöbb felnőtt és gyerek elköveti valamelyik típusú hibát. Chiesi és Primi (2009) szerint a gyerekek nagyobb arányban követik el az utóbbit, a felnőttek viszont az előbbit.

A feltételes valószínűséggel kapcsolatban általában csak középiskolásokat kérdeznek meg. Ennek oka, hogy nagyon nagy a hibázás aránya, még az idősebbek körében is. Nehéz az alábbi feladat is: „Kovács úr mondja: két gyerekem van, legalább az egyik fű.” Ennek ismeretében melyik a legvalószínűbb? a) A másik gyereke lány. b) A másik

gyereke fiú. c) Egyformák az esélyek. Fox és Levav (2004) egy MBA-csoportban 85 százalék c) választ kapott, és csupán 3,3 százalék a) választ, ami a helyes.

A Polaki-modellből kilépve kutatások egy része a várható érték kiszámítását is vizsgálja döntési helyzetben (Schlottmann és Wilkening, 2011). Ez indokolt: a 17. században, a valószínűség-számítás megszületésekor is fontosabb fogalom volt a valószínűségnél, gyakorlati vonatkozásai miatt. Olyan kérdések vizsgálhatók így, mint a kockázatkerülés vagy kockázatvállalás kortól és nemtől való függése.

Kutatások a szubjektív valószínűséggel kapcsolatban

A szubjektív valószínűséggel kapcsolatos kérdések egy része nem hozható matematikai modellel kapcsolatba, nincsenek például golyóhúzások vagy pénzfeldobások. Hogy egy adott helyzetben hogyan ítéljük meg egy esemény valószínűségét, korábbi élettapasztalatainktól is függ. A szubjektív valószínűséggel kapcsolatos valószínűségi téveszmék széles körét tárta fel Kahneman és Tversky (1972). Egyik ismert kérdésük: Egy városban összesen 72 olyan hatgyerekes család van, ahol LFLFFL sorrendben születtek a gyerekek. Adjon becslést azoknak a hatgyerekes családoknak számára, ahol FLFFFF volt a születési sorrend! A válaszadók nagy része az utóbbit sokkal kevésbé tartotta valószínűnek, és lényegesen kisebb volt a családok becsült száma (a becslések mediánja 30 volt), holott a két sorrend esélye egyenlő, ezért a legjobb becslés a 72 lett volna. Szintén tőlük származik az alábbi példa (Tversky és Kahneman, 1983): Linda 31 éves, egyedülálló, szókimondó és nagyon szép. Filozófiát tanult. Egyetemistaként komolyan foglalkozott a diszkrimináció és a társadalmi igazságosság kérdéseivel, és antinukleáris tüntetéseken vett részt. Ön szerint melyik valószínűbb: a) Linda banki pénztáros. b) Linda banki pénztáros és aktív a feminista mozgalomban. A vizsgálatban 142 válaszadó 85 százaléka az utóbbit választotta, holott az első a helyes, hiszen két esemény metszetének valószínűsége ($P(A \cap B)$) soha nem lehet nagyobb, mint az egyik esemény valószínűsége ($P(A)$). Kahneman a döntéshozatal területén, a kilátáselméletben végzett elméleti munkásságáért 2002-ben elnyerte a közgazdasági Nobel-emlékdíjat (alkotótársa, Tversky ekkor már nem élt).

Még az általános tudásunk is kapcsolatba hozható a szubjektív valószínűséggel, amire az alábbi példa világít rá (Gigerenzer, 1991): Melyik városnak van több lakosa? a) Hyderabad, b) Islamabad. Mennyire vagy biztos abban, hogy a válaszod helyes? 50% – 60% – 70% – 80% – 90% – 100%

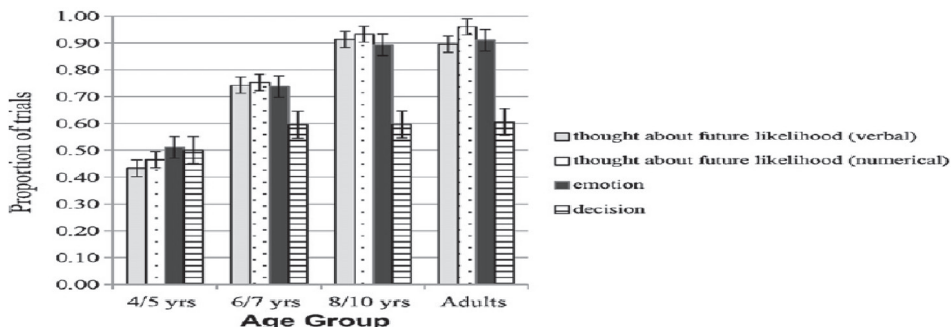
Könnyen átszámíthatjuk a szubjektív valószínűségeket a Ramsey által javasolt fogadási tétekké. Ha valaki például 80 százalékban biztos a válaszában, és 1 eurót kell x euróért kockáztatnia, akkor nyereményének szubjektív várható értéke: $-1 \cdot 0,2 + x \cdot 0,8$. Ha ez nem-negatív, akkor belemegy a fogadásba. Azaz $x = \frac{1}{4}$ euró (vagy annál nagyobb összeg) esetén érdemes fogadni.

A valószínűségi gondolkodást és a szubjektív valószínűségeket kulturális hatások is befolyásolhatják. Amir és Williams (1999) 11–12 éves tanulók valószínűségi ítéleteit vizsgálták. Észrevették, hogy a babonáság, például egyes mondókákon keresztül, befolyásolhatja az esélyek megítélését. Az angol gyerekek által ismert egyik mondóka („tails, tails, never fails”) nagy hatással volt rájuk. Pénzfeldobáskor 75 százalékuk preferálta az írást, csupán minden 12. a fejet, és hatodrészüket egyiket sem, amit a mondókának tulajdonítottak. Az eltérések egyik oka volt a vallás is. Az ázsiai gyerekek (zömmel muszlimok) vallásosabbak voltak, mint az angolok (nagyraoszt keresztények), és több eseményt kötöttek Istenhez. Ugyanakkor árnyaltabb a kép, mert az életben való sikerességet sokkal inkább Istennek tulajdonították, mint egy focimeccs megnyerését vagy a kockán a hatos

kidobását. A valószínűségi gondolkodásbeli eltérések legnagyobb részét viszont a nyelvi különbségekkel magyarázták meg a kutatók.

William és munkatársai (2002) szerencsejáték-helyzetben vizsgálták a kockázatvállalási hajlamot és azon keresztül a szubjektív valószínűség és az objektív valószínűség kapcsolatát. A résztvevők 5 és 64 év közöttiek voltak, így a kockázatvállalást a kor függvényében vizsgálták. Azt találták, hogy a gyerekek a nagy valószínűségű eseményeket következetesen túlbecsülték (még nagyobb szubjektív valószínűséggel vették figyelembe), az alacsony valószínűségeket viszont rendszeresen alulsúlyozták (a szubjektív valószínűség kisebb volt az objektívénél). A tendencia a kor növekedésével megfordult, felnőtteknél épp az ellenkezőt tapasztalták.

Latgattuta és Sayfan (2011) 201 négy és tíz év közötti gyereket és fiatal felnőttet vizsgált. Arra voltak kíváncsiak, hogy mennyire értik meg a jövőbeli valószínűséget és a bizonytalanságot. A résztvevők képek sorozatait kapták, minden sorozat négy képből állt. Egy-egy sorozatban valamilyen fizikai jellemző növekedett: egy vízzel félig megtelt vödör egyre jobban meg volt döntve (egyre nagyobb eséllyel dől ki a víz), az állandó magasságú fa mellett egyre magasabb zsiráf szerepel (egyre nagyobb eséllyel fogja elérni a leveleket). A képeket egy 2x2-es mezőben véletlenszerűen helyezték el (1. ábra). A résztvevőknek egy jövőbeli eseményt verbálisan kellett megítélni a biztosan nem, lehetséges, valószínűleg, illetve a biztosan szavak valamelyikével. Ezt követően megkérdezték őket, hogy a feladatban szereplő karakterek mit gondolnak, mit éreznek, és hogyan döntenének szerintük az adott bizonytalan helyzetben. Ugyanazt a helyzetet négy különböző oldalról (verbalitás, érzelmek, gondolatok, döntések) vizsgálták meg. Azt tapasztalták, hogy 4 és 10 éves kor között egyre jobban megértik a bizonytalanságot és a valószínűséget a gyerekek, ugyanakkor a 8–10 évesek és a felnőttek között már nincs számottevő különbség (4. ábra).



4. ábra. Döntési arányok az egyes vizsgálati formák alapján, kor szerint

Azt tapasztalták továbbá, hogy a nemek között eltérés van a bizonytalanság megítélésében. A lányok és nők ritkábban használták a biztosan nem, illetve a biztosan szavakat, mint a hasonló korú fiúk és férfiak.

Konklúzió

A valószínűségi gondolkodás kutatásának kezdetén, az 1940-es évektől kezdve Piaget és Inhelder feltérképezték, hogy szisztematikus vizsgálatokat igénylő helyzetben hogyan viselkednek a gyerekek, amikor elképzeléseikről szóban kell nyilatkozniuk. Úgy vélték, hogy 7 éves kor előtt nem is beszélhetünk valószínűségi gondolkodásról, és 16 éves kor

körül vagyunk minden tudással felvértezve, hogy helyes döntéseket hozhassunk valószínűségi helyzetben. Az 1970-es évek közepén Fischbein új szempontot hozott a vizsgálatokba: a korábbi tudásunk használatát, az intuíciót. Ezzel párhuzamosan megjelentek olyan kísérletek, amelyek életszerűbb helyzetben vizsgálták a gyerekeket.

Napjaink vizsgálatai egyre kevésbé irányulnak a verbalításra, a döntésemélet megjelenésével sokkal nagyobb szerep jut a döntések vizsgálatának. Ugyanakkor az interjú módszere is megmaradt; a döntések okainak feltárására és a stratégiák azonosítására egyes kutatók a gondolatok mellett az érzelmekre is rákérdeznek. A jelenlegi kutatások azt mutatják, hogy ezekben a vizsgálati helyzetekben már 5–6 évesen jó eredményeket produkálnak a gyerekek. Több kutatás szerint 8–10 éves korra ugyanolyan eredményeket

A jelenlegi kutatások azt mutatják, hogy ezekben a vizsgálati helyzetekben már 5–6 évesen jó eredményeket produkálnak a gyerekek. Több kutatás szerint 8–10 éves korra ugyanolyan eredményeket érnek el és ugyanolyan stratégiákat alkalmaznak, mint a felnőttek. A kutatók külön csoportját képezik a 3 évesnél kisebbekkel végzett kísérletek. Speciális módszerekkel, például a szemmozgás vagy a nézéspreferencia vizsgálatával arra következtettek, hogy bizonyos értelemben már hat hónapos korban felismernek a gyerekek statisztikai mintázatokat, mintaszámtól függően 12 és fél, illetve 14 hónapos korban pedig egyedi események valószínűségét is képesek saját valószínűség-fogalommal megbecsülni.

érnek el és ugyanolyan stratégiákat alkalmaznak, mint a felnőttek. A kutatások külön csoportját képezik a 3 évesnél kisebbekkel végzett kísérletek. Speciális módszerekkel, például a szemmozgás vagy a nézéspreferencia vizsgálatával arra következtettek, hogy bizonyos értelemben már hat hónapos korban felismernek a gyerekek statisztikai mintázatokat, mintaszámtól függően 12 és fél, illetve 14 hónapos korban pedig egyedi események valószínűségét is képesek saját valószínűség-fogalommal megbecsülni.

A kutatások leginkább az objektív valószínűségekre vonatkoznak, amelynél a vizsgálati szempontokhoz a Polaki-modell ad átfogó keretet.

Irodalomjegyzék

Amir, G. S. és Williams, J. S. (1999): Cultural Influences on Children's Probabilistic Thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 18. 1. sz. 85–107. University of Manchester, Manchester, England.

Bonatti, L. (2008): *At the origin of rationality: how intuitions of probabilities shape predictions about the*

future. Paper presented at the 16th International Conference on Infant Studies, Vancouver, Canada.

Borovcnik, M. és Peard, R. (1996): Probability. In: Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. és Laborode, C. (szerk.): *International Handbook in mathematics education*. Kluwer, Dordrecht. 239–288.

Boyer, Ty. W. (2005): *The sensitivity of five- to ten-year-old children to value, probability, and loss*. Dissertation.

Bryant, P. és Nunes, T. (2012): *Children's understanding of probability*. Nuffield Foundation.

Chiesi, F. és Primi, C. (2009): Recency effects in primary-age children and college students. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4. 3. sz. 259–274.

de Finetti, B. (1937): La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 7. 1–68.

Denison, S., Reed, C. és Xu, F. (2012): *The emergence of probabilistic reasoning in very young infants: evidence from 4.5- and 6-month-olds*. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/22545837>

- Denison, S. és Xu, F. (2009): Twelve- to 14-month-old infants can predict single-event probability with large set sizes. *Developmental Science*, 1–6.
- Dean, A. L. és Mollaison, M. (1986): Understanding and solving probability problems: A developmental study. *Journal of Experimental Child Psychology*, **42**, 23–48.
- E. Szabó László (2002): *A nyitott jövő problémája*. Typotex, Budapest.
- Falk, R. és Wilkening, F. (1998): Children's construction of fair chances: Adjusting probabilities. *Developmental Psychology*, **34**, 1240–1357.
- Fischbein, E. (1975): *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel, Dordrecht.
- Fischbein, E. (1987): *Intuition in Science and Mathematics*. Reidel, Dordrecht.
- Fischbein, E. és Gazit, A. (1984): Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, **15**, 1–24.
- Fischbein, E. és Grossman, A. (1997): Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, **34**, 1. sz. 27–47.
- Fischbein, E. és Schnarch, D. (1997): The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **28**, 1. sz. 96–105.
- Fox, C. R. és Levav, J. (2004): Partition-edit-count: Naive extensional reasoning in judgment of conditional probability. *Journal of Experimental Psychology*, **133**, 4. sz. 626–642.
- Gigerenzer, G. (1991): How to Make Cognitive Illusions Disappear: Beyond „Heuristics and Biases”. *European Review of Social Psychology*, **2**, 83–115.
- Gillies, D. (2000): *Philosophical theories of probability*. Routledge, London.
- Gilovich, T., Vallone, R. és Tversky, A. (1985): The hot hand in basketball: On the misperception of random sequences. *Cognitive Psychology*, **17**, 295–314.
- Gonzalez, M. és Girotto, V. (2011): Combinatorics and probability: Six- to ten-year-olds reliably predict whether a relation will occur. *Cognition*, **120**, 372–379.
- Gopnik, A. (2010): How babies think? *Scientific American*, 76–81.
- Gopnik, A. (2010): *Bölcssek a bölcsőben. Hogyan gondolkodnak a kisbabák?* Typotex, Budapest.
- Green, D. (1983): A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11–16 years. In: *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*. II. Teaching Statistics Trust. 766–783.
- Greer, B. (2001): Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics*, **45**, 15–33.
- Hacking, I. (1975): *The emergence of probability*. Cambridge University Press, Melbourne.
- Hacking, I. (1990): *The Taming of Chance*. Cambridge University Press.
- Hársing László (1970): *J. M. Keynes valószínűségi logikája. Logikai tanulmányok*. Akadémiai Kiadó, Budapest. 239–261.
- Hell Judit (1997): „akarat szabadsága” [szócikk]. In: Báthory Zoltán és Falus Iván (szerk.): *Pedagógiai Lexikon*. Keraban Kiadó, Budapest.
- Hodnik Čadež, T. és Škrbec, M. (2011): Understanding the Concepts in Probability of Pre-School and Early School Children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, **7**, 4. sz. 263–279.
- Inhelder, B. és Piaget, J. (1955): *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescence*. PUF.
- Jones, G. A. (2005, szerk.): *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Springer, New York.
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. és Mogill, A. T. (1997): A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, **32**, 101–125.
- Kahnemann, D. és Tversky, A. (1972): Subjective Probability: A Judgment of Representativeness. *Cognitive Psychology*, **3**, 430–454.
- Kaszparov, G. (2008): *Hogyan utánozza az élet a sakkot*. Európa Kiadó, Budapest.
- Keynes, J. M. (1963): *A Treatise on Probability*. Macmillan.
- Kushnir, T. és Gopnik, A. (2007): Conditional probability versus spatial contiguity in causal learning: Preschoolers use new contingency evidence to overcome prior spatial assumptions. *Developmental Psychology*, **43**, 1. sz. 186–196.
- Lagattuta, K. H. és Sayfan, L. (2011): Developmental changes in children's understanding of future likelihood and uncertainty. *Cognitive Development*, **26**, 4. sz. 315–330.
- Laplace, P. S. de (1814): *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris.
- Martignon, L. és Krauss, S. (2009): Hands-on activities for fourth graders: a tool box for decision-making and recognizing with risk. *Mathematics Education*, **4**, 3. sz.
- Morsanyi, K., Handley, S. J. és Serpell, S. (2012): Making heads or tails of probability: An experiment with random generators. *British Journal of Educational Psychology*.
- Mousoulides, N. G. és English, L. D. (2009). Kindergarten students' understanding of probability concepts. In: *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, July 19–24, 2009, Thessaloniki, Greece.

- Nunes, T. és Bryant, P. (1996): *Children doing mathematics*. Blackwell, Oxford.
- Nagy Dóra (2006): A valószínűségi és korrelatív gondolkodás a középiskolában. *Iskolakultúra*, **16**. 6. sz. 80–93.
- Nau, R. F. (2001): De Finetti was right: probability does not exist. *Theory and Decision*, **51**. 89–124.
- Piaget, J. és Inhelder, B. (1951): *La genese de l’idée de hasard chez l’enfant*. PFU, Paris.
- Polaki, M. V. (2002): Using instruction to identify mathematical practices associated with Basotho elementary students’ growth in probabilistic reasoning. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **2**. 357–370.
- Prékopa András (1980): *Valószínűségelmélet*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Ramsay, F. (1931): Truth and probability. In: Braithwaite, R. B. (szerk.): *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*. Kegan Paul, London. 156–198.
- Saffran, J., Aslin, R. N és Newport, E. L. (1996): *Statistical learning by 8-month-old infants*. Science, Washington.
- Savage, L. J. (1954): *The Foundations of Statistics*. John Wiley and Sons, New York.
- Schlottmann, A. és Wilkening, F. (2011): *Judgement and Decision Making in Young Children: Probability, Expected Value, Belief Updating, Heuristics and Biases*.
- Schulz, L. E. és Bonawitz, E. B. (2007): Serious fun: Preschoolers engage in more exploratory play when evidence is confounded. *Developmental Psychology*, **43**. 4. sz. 1045–1050.
- Spinillo, A. G. (2002): Children’s use of part–part comparisons to estimate probability. *Journal of Mathematical Behavior*, **21**. 357–369.
- Szabó Gábor (2013): *A valószínűség interpretációi*. Typotex, Budapest.
- Teglas, E., Giroto, V., Gonzalez, M. és Bonatti, L. (2007): Intuitions of probabilities shape expectations about the future at 12 months and beyond. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **104**. 19156–19159.
- Tversky, A. és Kahneman, D. (1983): Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, **90**. 293–315.
- William, T., Krause, K. és Vesterlund, L. (2002): Risk Attitudes of Children and Adults: Choices Over Small and Large Probability Gains and Losses. *Experimental Economics*, **5**. 53–84.
- Way, J. (1996): *A Study of Children’s Probability Judgements*. Merga.net.au
- Way, J. (1998): *ICOTS 5*. Singapore.
- Xu, F. és Garcia, V. (2008): Intuitive statistics by 8-month-old infants. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **105**. 5012–5015.
- Yost, P. A., Siegel, A. E. és Andrews, J. M. (1962): Nonverbal probability judgements by young children. *Child Development*, **33**. 4. sz. 769–780.