Nagy Csilla
Balassagyarmat, Szondi György Szakközép- és Szakiskola

Szemléletesség és absztrakció a görög matematikában

=>

Egy egységes vizuális nyelv kialakulása

„Wittgenstein piktogramjai, vázlatai és rajzai, Neurath statisztikai képei és grafikái azt a filozófiai belátást jelzik, amelyet a köznyelvben az „egy kép többet mond ezer szónál" mondás foglal magába." Andreas Roser megállapítása, pontosabban Léteznek-e autonóm képek? című tanulmánya (2003), amelyből az idézet származik, több érdekes mozzanatot rejt magában. Vizsgálódásai középpontjában két filozófus áll, akik – a szokványos „illusztrációmentes" filozófiai metódustól eltérően – előszeretettel használnak műveikben vizuális elemeket, grafikus képeket illusztrációs és argumentatív célra, elismerve ezzel a képi kifejezésmód szöveg melletti sajátos, kiegészítő funkcióját.

„Princípiumok"

Roser írásának célja teoretikusan meghatározni az „autonóm kép" fogalmát, illetve értelmezni ezt a két szerző műveinek, szemléletének kontextusában (jelen dolgozat nem tér ki ezekre a belátásokra), eközben pedig egy számunkra fontos kommunikáció- és befogadáselméleti kérdést érint: „mit" adnak hozzá a képek a szöveges (filozófiai, logikai) kifejtéshez, vagyis az olvasó szempontjából milyen jelentőséggel bír a szemléltetés.

Ez a kérdésfelvetés rokonságot mutat a matematika egy „fejlődéstörténeti" problémájával, vagyis a szemléletesség hangsúlyvesztésével az euklidészi matematikában. A matematika ugyanis, a filozófiához hasonlóan, olyan tudomány, amely „levezet", „beláttat" igazságokat, és amelynek gondolatmenete „vázolható", ábrázolható. A matematikai módszer alapvető eleme a bizonyítás: az ennek megfelelő kifejezés (deiknymi) a görögben az Euklidész előtti korokból származik, és annyit jelent: „megmutatni", „láthatóvá tenni", vagyis „kézenfekvő arra gondolni, hogy a matematikában a bizonyítás eredetileg éppen abból állhatott, hogy egyszerűen megmutatták, szemmel láthatóvá tették a szóban forgó állítás, a tétel helyességét." (*Szabó*, 1978, 128.) A „megmutatás" nyomai több (főként a pitagoreusok tevékenységéről szóló) ókori anekdotában fennmaradtak, gondoljunk csak a négyzet megduplázásáról szóló történetre, vagy arra a tényre, hogy a pitagoreusok aritmetikai megfigyelései a kavicsokkal való játék, kísérletezés eredményei.

A szemléletesség jelentősége azonban a legtöbb matematikaelmélet szerint visszaszorult akkor, amikor a matematika mint rendszeres tudomány létrejött. Az ókori görög matematika történetéről szóló munkák mindegyike Euklidész *Elemek* című könyvét (*Euklidész*, 1983) tekinti a rendszeres matematika alapművének, tudománytörténeti és „fejlődéselméleti" szempontból egyaránt. Az *Elemek* ugyanis mintegy összegzi és részben egységesíti az addig ismert téziseket, bizonyos értelemben a görög matematikatudomány „enciklopédiájaként" funkcionál; és azt mondhatjuk, fejlődési szakaszok keresztmetszetében szituálódik: a „modern” (Euklidész korabeli) terminológia és eljárások mellett felfedezhetőek a korábbi időszakhoz kapcsolódó elemek is. Szabó Árpád *A görög matematika kibontakozása* című művében Beckerre hivatkozik, aki észrevette, hogy az *Elemek* IX. könyvében szereplő tizenhat tétel nem felel meg az euklidészi gondolkodásmódnak, „archaikusabb”, mint az *Elemek* matematikája (*Szabó*, 1978, 124.) – akár egy későbbi másoló illesztette a könyvbe ezt a részt, akár maga Euklidész tette hagyománytiszteletből, mindenképp szemléletek, matematikai korszakok egymásmellettiségét érzékelhetjük (*Neugebauer*, 1984, 158.).

Euklidész, illetve a neki tulajdonított könyv nagysága abban áll, hogy elfordul a pitagoreusokra jellemző „szemléletességtől”. Szabó Árpád szerint: „Bizonyos, hogy Euklidész *céltudatosan* mellőzte a páros és páratlan számoknak kavicsokkal való kirakását. Mert kavicsokkal, esetről esetre, csak valamilyen adott, *konkrét* páros vagy páratlan számot mutathatott volna be; az ő tételei viszont *minden* elképzelhető páros és páratlan számra érvényesek.” (*Szabó*, 1978, 142.) Ez pedig az érzéki tapasztalatokkal szembeni bizonytalanságból származik, összefügg az eleai filozófusok (Parmenidész, Zénón, Melisszosz) módszertanával, valamint a bizonyítás problémájával, amely Euklidésznél nem egyszerűen megmutatás, ábra, hanem logikai-verbális levezetés (vesd össze: *Szabó*, 1978, 143.). Három olyan fogalmi csoportot különít el, amelyeket nem kell bizonyítani: a „definíciók”, „posztulátumok” és „axiómák” jelentik az alapot, a kiindulópontot a matematikus számára tételei igazolása során. A bizonyítás „műfaja” pedig négy fő részre tagolódik: a bizonyítandó tétel leírását követi a levezetés (a tulajdonképpeni „beláttatás”), az ábra (a „megmutatás” hagyományát folytatva, azonban, ahogy erre Szabó Árpád rámutat, gyakorlati funkció nélkül), majd a tétel megismétlése („q. e. d.”, quod erat demonstrandum, „amit bizonyítani akartunk”) (*Szabó*, 1978, 125–130.).

A bizonyítás új formája tehát csak jelzésértékűen tartja meg a szemléletességet, így például a páros és páratlan számok ábrázolása kavicsok helyett szakaszokkal történik, amelyeken „nem látszik”, milyen számról van szó, csak „elgondoljuk” az egyes szakaszok értékét az előzetes megegyezés szerint. Azonban a „matematika nyelve” ma nem a verbalitást jelenti: az iskolai, hétköznapi gyakorlatban a matematika művelése grafikus jelek alkalmazásával történik. Ez a formalizmus/szimbolizmus a 19. században alakult ki (illetve ekkorra datálható a fejlődés kezdete), vagyis nincs szoros kapcsolatban az euklidészi matematikával (*Szabó*, 1978, 126.), sőt azt mondhatjuk, a szemléletesség szempontjából az Euklidészig tartó fejlődéssel ellentétes irányt vett. Felmerül a kérdés, mivel magyarázhatjuk ezt, hogyan definiálható ez a fejlődés tágabb (a matematika keretein túlmutató) értelemben, ahogy kérdés az is, valóban éles határ vonható-e az Euklidész előtti és a modern, valamint az euklidészi ábrázolásmód, szemléltetés között.

„Tétel”

1. A matematika a kezdeteire jellemző szemléletesség helyett egy új képi nyelvet talált magának, amelyet grafikus matematikai jelek alkotnak. A képiség, a vizualitás jelentősége (egyfajta látens szemléletesség) Euklidésznél is érzékelhető.

2. A modern matematika egyfajta univerzális nyelvnek (vagy inkább egy ilyen kísérlet termékének) tekintendő, egyetemessége pedig képi-vizuális jellegéből származik.

„Levezetés”

1. A szemléletesség Szabó Árpád szerint a számok, idomok valósághű ábrázolását jelzi: példaként említi a kavicsokkal való számolást, illetve a háromszög, a kör, a négyzet lerajzolása közben/feltételével történő vizsgálatát: a pitagoreusok a konkrétumokat próbálták megjeleníteni, épp ezért a geometria esetében a speciális eseteket vizsgálták, hiszen ezeket

lehetett a legpontosabban ábrázolni (*Szabó*, 1978, 97.). A szemléletességtől való elfordulás Euklidész esetében egyben az absztrakció hangsúlyosabbá válását jelentette: míg a szemléletesség a konkrét dolgok (síkidomok, számok) ábrázolását teszi lehetővé, addig az absztrakció a tapasztaltból az „elgondolhatót" ragadja meg: a látható négyzet a matematikust csak emlékezteti arra a négyzetre, amely létezhet (*Szabó*, 1978, 155.).

A szemléletestől, az ábrázolttól való elszakadást jelzi Euklidész törekvése az alapfogalmak meghatározására, hiszen ha van „receptünk" valamely vizuálisan érzékelhető fogalomra, akkor nem szükséges szemléltetnünk: elgondolhatóvá vált számunkra, és így kiterjesztettük az értelmezés körét. A „definíciók", „axiómák", „posztulátumok" épp ezért nem bizonyítás révén jönnek létre, hanem mindenki által (legalábbis az ókorban) elfogadott meghatározások. Csakhogy értelmezésünkben a definíciók éppúgy a szemléletességhez kötődnek, mint a kavicsok alkalmazása a pitagoreusoknál: ezt bizonyítja a legújabb kori matematikafilozófiai irányzatok egyike, amelynek alapműve Hilbert *A geometria alapjai* című könyve (idézi: *Csaba,* 2003, 10.). Ennek sajátossága, hogy a sokak által elvetett axiomatikus euklidészi rendszert beépíti saját elméletébe, azonban modern felfogással kezeli azt: Csaba Ferencet idézve „a modern matematikában jelenik meg az axiómarendszerek másik értelmezése, amely szerint az axiómák – mint például a csoportelmélet axiómái – bizonyos struktúra (típus) implicit definíciójának tekintendők. Az előbbi esetben nyilvánvaló, hogy az axiómák mire vonatkoznak, vagyis létezik egy kitüntetett interpretáció (a síkgeometria esetében a sík pontjainak és egyeneseinek rendszere), a második esetben nem létezik kitüntetett interpretáció: bármely halmazt csoportnak nevezünk, ha a rajta értelmezett művelet kielégíti a csoportaxiómákat." (*Csaba*, 2003, 10–11.)

A matematika nyelve épp képisége miatt lehetne univerzális, legalábbis használati körét tekintve: elvileg beszélhetünk olyan csoportról, amelynek minden tagja részese a „megegyezésnek" a matematikai jelek értelmezésére és használatára vonatkozóan; a jelek elvileg minden nyelven éppúgy olvashatóak, nem szükséges verbalizálnunk őket a megértésük és alkalmazásuk során, s ha mégis nyelvileg fejezzük ki ezeket, feltehetőleg minden nyelven közel azonos mértékű „csúsztatást" hajtunk végre. A problémát azonban a kifejezés tartalma jelentheti: a matematika nyelvén nem fejezhetünk ki például emóciókat, szándékokat, cselekvéseket, csak a matematika világán „belüli" tartalmakra korlátozódhatunk.

A Hilbert-program számunkra csak azért fontos, mert ezen elmélet létrejötte felhívja a figyelmet arra, hogy Euklidész definíciói/axiómái/posztulátumai – bár épp a szemléletességtől próbálnak elszakadni azáltal, hogy az alapfogalmakat nyelvileg hozzáférhetővé teszik, vagyis medializálják – szorosan kötődnek egy hagyományos szemlélethez, ez pedig nem más, mint a „tapasztalhatóban" (síkban, térben) való gondolkodás. A geometriai absztrakció Miklós Pál szerint sem tökéletes: „A teljes absztrakciónak az az alapvonása, hogy a közlés közös jeleiről mond le, a tárgyi hasonlóságról, az úgynevezett ikonikus jelekről. (Ezért nem teljes absztrakció a geometrikus: a tudomány bizonyos jeleit használja fel nagyon általánosságba vesző, de mégis felfogható, racionálisan értelmezhető közlésre.)" (*Miklós*, 1976, 92.)

A szemléletességhez való kötődés gyanúja alól látszólag kivételt képeznek az irracionális számokra irányuló vizsgálatok, hiszen az irracionális számok halmaza nem más, mint az absztrakció egyik legjellegzetesebb példája. Azt is tudjuk azonban, hogy az irracionális számok felfedezése a négyzetszámok használatához kötődik, amely pedig a „lerajzolható" négyzetek tanulmányozására vezethető vissza (az elnevezésben a négyzet valóban a síkidomot jelöli: négyzetszám az, amit ki lehet rakni kavicsokból négyzet alakban; és ugyanígy a „testszámok" [köbszámok] három azonos tényező szorzatából állnak, testalakban rakhatók ki) (*Szabó*, 1978, 32–33.). Bár az irracionális számok a szemléletesség elvetését teszik szükségessé (sem aránypárként, sem kavicsokkal nem ábrázolhatóak), egyben nélkülözhetetlenné teszik a gyökjel bevezetését a matematikába: bár a szemléletesség felszámolódik, létrejön egy olyan, alapvetően vizuális kifejezési mód, amely a későbbiekben a matematika önálló, nem verbális kifejezésmódjának kialakítását teszi lehetővé.

2. Roser szerint Neurath és Wittgenstein filozófiai munkái között két érintkezési pontot találunk: egyrészt, és erre a bevezetőben már utaltunk, mindketten – ellentétben a filozófusok többségével – előszeretettel használnak képi-vizuális, grafikus elemeket illusztrációs és argumentációs célra. Ezzel együtt pedig érdeklődéssel fordulnak a világnyelv lehetőségének kérdése felé, amely mindkét szerző esetében a vizualitással, a képi kifejezésmóddal függ össze (*Roser*, 2003, 215.). Neurath egy ideális vizuális nyelv megalkotását tűzi ki célul, Wittgenstein pedig a képek kontextushoz kötöttségét illusztrálja vizuális példákkal, vagyis a két szemlélet látszólag ellentmond egymásnak (ha valami kontextusfüggő, akkor nem rendelkezik univerzális alkalmazási körrel, és fordítva). Mégis, Roser öszszevethetőnek tekinti képelméletüket, mivel „nyilvánvaló, hogy mindkét filozófus felismerte a képek és rajzok önálló értékét a kijelentéstartalmak szemléltetésére" (*Roser*, 2003, 215.), és igaz az, hogy „az út és mód, ahogyan valamit közölnek, éppúgy meghatározza a közlés tartalmát, mint annak lehetséges absztrakt, tisztán informális tartalma" (*Roser*, 2003, 213.). Ez a jelenség érzékelhető akkor, amikor valamit különböző nyelveken próbálunk kifejezni: ma már nyelvelméleti közhely az a megfigyelés, hogy egy szöveget nem tudunk veszteség, „csúsztatás" nélkül lefordítani egy másikra.

Az univerzális nyelv keresésénél így jöhet szóba a vizualitás, függetlenül attól, hogy a képi nyelvet is csak veszteséggel tudjuk verbalizálni. Roser szerint a kép kontextustól függetlenül is mond valamit, az egyes, összefüggésrendszerekben való értelmezések úgynevezett „használati értéket" rendelnek a képhez (a „vizuális argumentumhoz") (a fogalmakat lásd *Roser*, 2003, 222–223.), amelyek egyenként nem fedik le a kép egészét. Vagyis, a matematika nyelvén, a kép egy olyan halmaz, amelynek elemei a különböző „alkalmazások", a kép konkretizációi különböző elvek, funkciók mentén. Épp ezért a mai matematika jeleinek egy része (+, –, :, =, >,<, a, b, c, , , , , stb.) is tekinthető képnek, pontosabban képhasználatnak, a tudomány nyelve pedig vizuális, hiszen ezek a jelek más összefüggésben, a matematikaitól elkülönbözödő használati körben is értelmezhetőek.

A matematikai gondolkodás, illetve a tudományon belüli megegyezés csak egyetlen alternatíva a képek lehetséges használati módjai közül, amely azonban meglehetősen széles körű: a matematika nyelve nem korlátozódik az anyanyelvre, nem köthető korhoz, nemhez, hiszen az óvodai gyakorlatok egy része is a matematikai szemléltetés példája. A matematika nyelve épp képisége miatt lehetne univerzális, legalábbis használati körét tekintve: elvileg beszélhetünk olyan csoportról, amelynek minden tagja részese a „megegyezésnek" a matematikai jelek értelmezésére és használatára vonatkozóan; a jelek elvileg minden nyelven éppúgy olvashatóak, nem szükséges verbalizálnunk őket a megértésük és alkalmazásuk során, s ha mégis nyelvileg fejezzük ki ezeket, feltehetőleg minden nyelven közel azonos mértékű „csúsztatást" hajtunk végre. A problémát azonban a kifejezés tartalma jelentheti: a matematika nyelvén nem fejezhetünk ki például emóciókat, szándékokat, cselekvéseket, csak a matematika világán „belüli" tartalmakra korlátozódhatunk.

A fentiek alapján tehát azt mondhatjuk, a matematika nyelve csak részben (a befogadó szempontjából) lenne univerzális: ami „mondva" van (s vegyük tudomásul, hogy nem minden „mondható”), az egyezmény részesei számára érthető, egyértelmű, annak ellenére, hogy maga a kép többértelmű (például a „+” értelmezése lehetne „kereszt”; „p” csak a matematikában kitüntetett a prímszámok egyezményes jeleként, egyébként épp olyan betű, mint a többi), hiszen össze van kötve valamely „projekciós szabállyal” (*Roser*, 2003, 222.).

„q. e. d.”

A matematika „olvasása” során nem vonatkoztathatunk el a vizualitástól, hiszen alapvetően grafikus jelekkel dolgozik, amelyek már az ókori görögök idején kialakultak. A matematika – az említett korlátozásokkal, elvileg – értelmezhető univerzális nyelvként, amely egyezményes jel- és szabályrendszerrel rendelkezik.

Irodalom

Csaba Ferenc (2003, szerk.): *A matematika filozófiája a 21. században.* Osiris, Budapest.

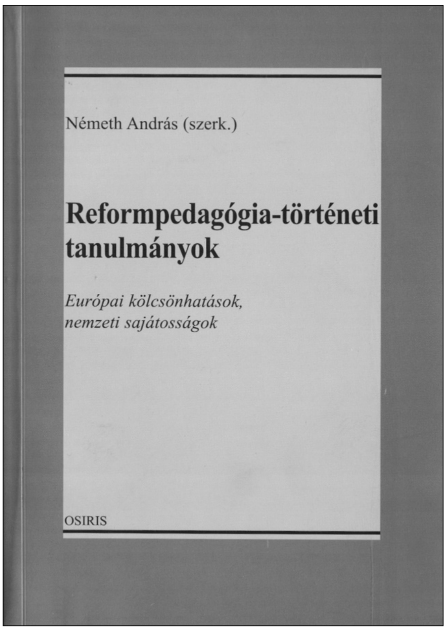
Euklidész (1983): *Elemek.* Ford. Mayer Gyula. Gondolat, Budapest.

Miklós Pál (1976): Az absztrakció és a néző. In uő: *Vizuális kultúra.* Magvető, Budapest. 90–95.

Neugebauer, Otto (1984): *Egzakt tudományok az ókorban.* Ford. Guman István. Gondolat, Budapest.

Roser, Andreas (2003): Léteznek-e autonóm képek? Ford. Lehmann Miklós. In Neumer Katalin (szerk.): *Kép, beszéd, írás*. Gondolat, Budapest. 211–235.

Szabó Árpád (1978): *A görög matematika kibontakozása.* Magvető, Budapest.



A Gondolat Kiadó könyveiből