

## A valószínűségi és korrelatív gondolkodás a középiskolában

*Kinézünk az ablakon és a sötét felhők láttán elhalasztjuk az asznapra tervezett szabadtéri kirándulást. Rulettasztalnál ülve sok fekete szám kiforgása után inkább piros számra tesszük zsetonjainkat. A sötét felhők megjelenését ugyanis nagy valószínűséggel – tapasztalataink szerint – eső fogja követni, illetve megfigyeléseink szerint sok fekete szám után nagyobb a valószínűsége egy piros számnak. Ez a gondolkodási forma a valószínűségi és korrelatív gondolkodás.*

A korrelatív gondolkodást vizsgáló korábbi kutatások négy fő téma köré csoportosíthatók. A véletlenszerű eseményekkel kapcsolatosan már Piaget is végzett kísérleteket. Ezek a kísérleti eredmények a műveleti gondolkodás fejlesztésének fontosságára hívták fel a figyelmet. (Csapó, 2002) A neopiaget-iánus irányzathoz tartozó kutatók is nagy figyelmet fordítottak ezekre a gondolkodási képességekre, megállapításaik jelentős szerepet játszottak a matematikatanítás megújításában és a természettudományos nevelés reformjában. A szociálpszichológia a következtetések levonása közben lejátszódó gondolkodási folyamatokkal foglalkozik, a tudáselméleti megközelítés pedig a valószínűségi gondolkodás típusainak feltárásában segít. (Bán, 1998)

Piaget a véletlenszerűnek tűnő események mögött mindig talált fizikai magyarázatot. Szerinte az okok mindig egy lépcsőzetes oksági sorozatba rendezhetők, de ha ez a sorozat túl összetett, az emberi gondolkodás egyszerűsít és véletlenszerűnek tekinti azt. (Bán, 1998) A véletlenszerűség felismeréséhez tehát két tényező, a dolgok kölcsönhatásának vagy függetlenségének ismerete szükséges. A gyerekek viselkedését megfigyelve Piaget arra jutott, hogy ezeket a gondolkodási módszereket tanulnunk kell.

Piaget volt az első, aki klinikai módszerekkel vizsgálta a valószínűségi alapú következtetés képességének fejlődését gyerekkortól kezdve. A fejlődési szakaszok megállapítására hat kísérletet folytatott le. Egyik kísérlete például a korrelatív gondolkodás okozati típusának első vizsgálata. (Bán, 1998) Nagy József ezt az összefüggéstípust kauzális törvénynek, illetve elvnek nevezi, a korrelatív gondolkodás az ő rendszerében az együttjárás típusú összefüggést jelenti. (Nagy, 2000) Ebben a kísérletben a kezdetben véletlenszerű események egy idő után szabályossá váltak, a megfigyelés szempontja az volt, hogy a kísérleti alanyok hogyan fedezik fel a rendezetté válást és annak okát. A kísérletben egy, a televízióból ismert, szerencsekerékhez hasonló szerkezetet használtak, amelyet 8, illetve 16 egyenlő cikkre osztottak, és beszínezték úgy, hogy a szemben lévő cikkek azonos színűek legyenek. A kereket megforgatva véletlenszerű volt, hogy hol állt meg a szerkezet. Miután a kísérletben részt vevő gyerekek fölismerték a véletlenszerűséget, a kutatók különböző súlyú dobozokkal és mágnesekkel befolyásolták a megállás helyét. A továbbiakban már nem véletlenszerűen állt meg a kerék, hanem valamilyen szabályosság alapján. (Bán, 1998) A gyerekek feladata az volt, hogy felismerjék a szabályosságot és megpróbálják kitalálni annak okait

A válaszokat három csoportba sorolták. Az első csoportba azon gyerekek válasza tartoztak, akik azt állították, meg tudják mondani, hol fog megállni a kerék, de a jóslás alap-

ja csak egy maguk által kitalált, érzelmi alapú szabály volt. A második csoportba tartoztak azon válaszok, amelyek szerint a kerék már nem véletlenszerűen állt meg, de a válaszadók a pontos szabályt nem tudták megalkotni, illetve helyes jóslatokat nem tudtak adni. A harmadik csoportba azok a válaszok kerültek, amelyek tanúsága szerint a kísérleti alanyok néhány eset alapján felismerték a szabályosságot, az okokra is gyorsan rájöttek, és helyes jóslatok létrehozására is képesek voltak. (Bán, 1998) A Piaget által leírt kognitív fejlődés állomásai alapját adták a hazai „új matek” elnevezésű mozgalomnak, mely a matematikatanítást úgy szervezte át, hogy a tanulót végigvezesse a kognitív fejlődés állomásain. (Csapó, 2002)

Piaget kísérletein alapulva a neopiageti-ánus kutatók ezen képességek pontosabb leírását és fejlesztését tűzték ki célul. A kutatások nagy része a Lawson által megalkotott teszt módosítása volt. Innen származnak a nevezetessé vált hal- és egér-feladatok, amelyekről később részletesebben szólok. Mindkét feladat a korrelatív gondolkodás együttjárás típusának fejlettségét méri. Ross és Cousins kutatásaiban a korrelatív gondolkodás az induktív gondolkodás részképességeként jelenik meg. A különböző kutatások eredményei szerint a korrelatív gondolkodást mérő feladatokon a kísérletben résztvevők alacsony teljesítményt értek el, az életkor előrehaladtával pedig ehhez a szinthez képest is nagyon kicsi volt a fejlődés. Az okokat egyik kutatás sem kereste. Ross is csak csoportosította a vizsgálatban résztvevő feladatokat. A legtöbb információt tartalmazó csoport a két, kétértékű változós mintán vizsgált statisztikus alapú összefüggés megállapítása. A korábban említett egér-feladat ilyen típusú. (Bán, 1998)

A szociálpszichológia figyelme az orvosképzés kapcsán terelődött a korrelatív gondolkodás vizsgálatára. Az orvosok egy tünetegyüttesből következtetnek a betegségre, de előfordul, hogy a tünetek mögött nem a megszokott betegség rejlik. A szociálpszichológiai megközelítés középpontjában a látszatkorreláció problémája áll, tehát azt vizsgálja, hogy a rögzült következtetési sémák mennyire félrevezetőek. Például az orvosi gyakorlatban, ha egy tünetegyüttes mögött mindig egy bizonyos betegség áll, egy idő után minden ilyen tünet esetén az adott betegségre következtetnek az orvosok. A problémát itt az jelenti, hogy léteznek kivételek, azaz nem mindig ugyanaz a betegség a tünetek okozója. A „félrediagnosztizált” betegség az induktív következtetési sémák deduktív vá válása miatt bekövetkező hiba tipikus esete. Ha nagyszámú példán gyakorlással alakulnak ki a gyűjtőfogalmaink, ez a folyamat játszódik le. Nagy József modelljében ez a gondolkodási folyamat valószínű (sztochasztikus) összefüggés megállapítását jelenti. (Nagy, 2000)

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a neo-piagetiánus és a szociálpszichológiai megközelítés ellentétes. A szociálpszichológia arra kíváncsi, hogy a kivételezési stratégiák hogyan módosulnak egy, a valószínűségi változók közötti, megszokott összefüggés miatt. A neopiageti-ánus kutatók azt vizsgálják, hogy a kis számú kivétel ellenére hogyan ismerjük fel mégis a valószínűségi változók közötti összefüggést. (Bán, 1998)

A tudáselméleti megközelítés segít rendszerbe foglalni a korrelatív gondolkodás különböző típusait. Nagy József szabályelméleti megközelítése nem korlátozódik a valószínűségi gondolkodás problematikájára, ehelyett átfogóbb képet ad az életünkben előforduló összefüggésekről, ezzel elhelyezi a valószínűségi és korrelatív gondolkodást a szabályok rendszerében. (Nagy, 2000) Részletessége miatt a korrelatív gondolkodás fogalmát itt Ross és

---

*Eddig a tanulók gondolkodását alapvetően determinisztikusan fejlesztették az iskolai tanórák, azonban az iskolán kívüli, biztosítókkal teli, tőzsdén alapuló világ más gondolkodási stratégiákat igényel. Az iskolával szembeni változó elvárások miatt a valószínűségszámítás és statisztika beépült a tantervekbe, és megjelent a kétszintű érettségi követelményeiben is.*

---

Cousins definíciója alapján használjuk: „...helyes korrelatív gondolkodáson a valószínűségi változók közötti összefüggési szabály felismerését értjük”. (Bán, 1998, 226.) A jövőre vonatkozó következtetéseink két csoportra oszthatók: együttjáró jelenségekre és ok-okozati összefüggésekre vonatkozó jóslatok. Legyen adott két esemény: A és B. Az együttjáró típusnál bármelyik, A vagy B esemény megjelenésekor rendszeresen megjelenik a másik esemény is. Az ok-okozati típusnál A megjelenése maga után vonja B megjelenését is.

A valószínűségi szabályalkotó gondolkodás típusait Nagy József munkája alapján csoportosítjuk. A csoportalkotásnál figyelembe kell vennünk a feltétel, a következmény és a közöttük levő viszony tulajdonságait. A feltétel lehet szükséges (törvény típusú szabály) vagy nem szükséges (elv típusú szabály), illetve lehet elegendő vagy nem elegendő. Ebből következően a következmény lehet szükségszerű (determinisztikus szabály), illetve valószínű (sztochasztikus szabály). A feltétel és következmény közti viszony oksági vagy együttjárási lehet. Ezek közül csak a szükséges, kétértékű feltételváltozójú folytonos oksági és kétértékű együttjárási viszonyú szabálytípusokat vizsgálták korábbi kutatások részletesebben. (Nagy, 2000)

A modern természet- és társadalomtudomány új eredményei közül nagyon sok valószínűségi összefüggésen alapszik. (Bán, 1998) Nem képzelhető el igazi előrelépés valószínűségi és statisztikus fogalmak ismerete nélkül például az atomelméletben, a statisztikus fizikában, a genetikában, a szociológiában, de még a tőzsdék gazdasági folyamatainak vizsgálatában sem. Ezért fontos az iskolai tananyagba már a kezdetektől beépíteni a statisztikával és valószínűséggel kapcsolatos fogalmak megismertetését. Nem a pontos matematikai fogalmak átadása fontos, hanem a szemléletmód kiépítésére kell helyezni a hangsúlyt.

A magyar tantervben bekövetkező változás mozgatórugója épp ez a szemléletváltás volt, melynek során az ismeretközpontúság helyett fokozatosan a gondolkodási képesség fejlesztésére, alkalmazható tudás átadására terelődik a hangsúly. Ezt az átalakulást jól reprezentálja a statisztika és valószínűségszámítás beillesztése az iskolai oktatásba. A gondolkodás és azon belül a valószínűségi gondolkodás fejlesztése a 21. századi iskola nagy kihívása. (Csapó, 2002) Eddig a tanulók gondolkodását alapvetően determinisztikusan fejlesztették az iskolai tanórák, azonban az iskolán kívüli, biztosítókkal teli, tőzsdén alapuló világ más gondolkodási stratégiákat igényel. Az iskolával szembeni változó elvárások miatt a valószínűségszámítás és statisztika beépült a tantervekbe, és megjelent a kétszintű érettségi követelményeiben is.

Mivel a valószínűségszámítás és statisztika ebben a formájában új témakör a középiskolai oktatásban, sok kérdés vár még válaszra a gondolkodási képességek fejlesztésével kapcsolatosan. (Csapó, 1999) Az utolsó átfogó magyarországi felmérés 1995-ben, tehát több mint tíz évvel ezelőtt zajlott. Ez alatt az idő alatt több változtatás is történt a tantervben, ennek hatásainak, azaz a gondolkodási stratégiák fejlettségének vizsgálatára felmérést végeztünk. A felmérés kis elemszámú volt, ezért csak hozzávetőleges képet adhat a valószínűségi és statisztikai gondolkodás alapjainak fejlődéséről. A kérdés, amire a választ kerestük az, hogy a középiskolás évek alatt kapott tudás befolyásolja-e a valódi élethelyzetekben használt gondolkodási stratégiákat. (Csapó, 1999) Arra voltunk kíváncsiak, hogy az iskolai valószínűségszámítás-oktatás felkészít-e a mindennapi életbeli helyzetekben szükséges gondolkodási stratégiákra, vagy esetleg megreked a kockadobálás esélyeinek latolgatásánál. Előzetes feltevéseink alapján azt vártuk, hogy a magasabb évfolyamba járó diákok eredményei jobbak lesznek az alsóbb évfolyamosok eredményeinél, hiszen elméletben a mindennapi életben alkalmazható tudást, ismeretet kapnak, gondolkodási stratégiákat fejlesztik az iskolában.

### A felmérés módszerei és eszközei

A minta kiválasztásánál fontos szempont volt, hogy a valószínűségi gondolkodási stratégiák fejlődése is vizsgálható legyen, ezért ugyanazokkal a feladatokkal a 9. és a 11. év-

folyamon is elvégeztük a mérést. A kutatásba 86 9. és 69 11. osztályos tanulót vontunk be. A minta homogenitását csökkentettük úgy, hogy három különböző középiskolában töltöttük ki a feladatlapot. Az iskolák mindegyike szegedi, szerepel köztük két gimnázium, ezeket A-val és B-vel jelöljük, és egy szakközépiskola, C. A mintaválasztásnál figyeltünk továbbá arra is, hogy egyik osztály se legyen matematika tagozatos. Mivel az oktatás szemléletét befolyásolja a tankönyv, ezért olyan osztályokat választottunk, ahol ugyanabból a tankönyvből tanulnak a diákok. Az egy iskolán belüli két évfolyam összehasonlítását azzal tettük pontosabbá, hogy olyan 9-es és 11-es osztályt választottunk, ahol a diákok megközelítőleg azonos érdeklődési körűek.

A felmérő hét feladatból állt, a kitöltésre 45 perc állt rendelkezésre. A feladatlapokra fel kellett jegyezni a kitöltés kezdetének és végének pontos idejét, ezzel kontrollálni tudtuk, hogy a feladatlap kitöltésére szánt idő megfelelő-e.

A hét feladat között szerepeltek a szakirodalomból jól ismert és korábban még nem mért feladatok is. A feladatok közé a felmérésekben gyakran megtalálható, már említett hal- és egér-feladat nyílt végű változatát is elhelyeztük, a két feladat közötti különbség a megadás formája és a feladatban szereplő esetek száma volt. Mindkét feladat a korrelatív gondolkodás együttjárási szabályszerűséget kereső feladatai közé tartozik. Az oksági szabály felismerését vizsgáló feladatok egy változata *Nemetz Tibor* könyvéből (2003) származik. Már Piaget is megállapította, hogy a valószínűségi gondolkodás kialakulásához elengedhetetlen az események függőségének vagy függetlenségének megállapítása. Ennek vizsgálatára két saját feladatot készítettünk. Az eddigi öt feladat a valószínűségi gondolkodás részfolyamatainak fejlettségét vizsgálta. További két probléma került a feladatlapba, melyek a valószínűségi gondolkodásnak a problémamegoldási eszköztárba való beépülését kutatják. Ezen feladatok már összetett gondolkodási stratégiát várnak el, miközben a valószínűség fogalmának kialakulásával és a valószínűségi feladatok megoldása közben alkalmazott módszerekről is információt adnak. Az egyik *Battenero* cikkéből (1998) származik, a másik pedig egy PISA mintafeladat magyarra adaptált változata.

Mindegyik feladat nyílt végű volt, hiszen arra voltunk kíváncsiak, hogy a diákok hogyan gondolkodnak valószínűségi problémák esetén, és nem csupán a végső következtetést tartottuk fontosnak, hanem a gondolatmentet is, amin keresztül a válaszaikat megalkották. Ez ugyan nehezebbé tette az elemzést, de a válaszokból remélhetőleg több információ nyerhető. Egy feladat kivételével, melynek elemzése nem pontozással történt, mindegyikre legfeljebb 4 pontot lehetett kapni – a válasz helyességétől függően 3, 2, 1, illetve 0 pontot adtunk.

### Általános megállapítások

A felmérés feladatonkénti eredményeit a későbbiekben részben elemezzük, először az összesített és a feladatonkénti teljesítményt és a fejlődésgörbéket vizsgáljuk meg. Ez alapján képet kaphatunk arról, hogy melyik feladattípusban voltak sikerebbek a diákok.

A feladatok eredményei (*1. táblázat*) jól mutatják, hogy a teljesítmények között viszonylag nagy különbségek vannak. Az oksági viszonyt kereső feladat bizonyult a legkönnyebbnek, ebben a diákok kimagasló eredményt értek el. Az elért eredmények alapján a PISA, azaz a problémamegoldást vizsgáló feladat (táblára érmével dobálunk) lett a következő. Ennek eredménye messze elmarad az előző teljesítménytől. Az együttjárási típusú hal-feladat bizonyult a legnehezebbnek, a nagyon alacsony eredmény lehetséges okait később elemezzük.

Különleges feladatnak minősül a PISA feladat, hiszen míg a C iskola esetében ez egy fejlődést jól mutató feladat, a teljesítmény közel 40 százalékkal nőtt, addig az A iskola tanulóinak teljesítménye több mint 20 százalékkal csökkent. A lehetséges magyarázatról

1. táblázat. A felmérés feladatainak eredményei különböző feladattípusok esetén (%)

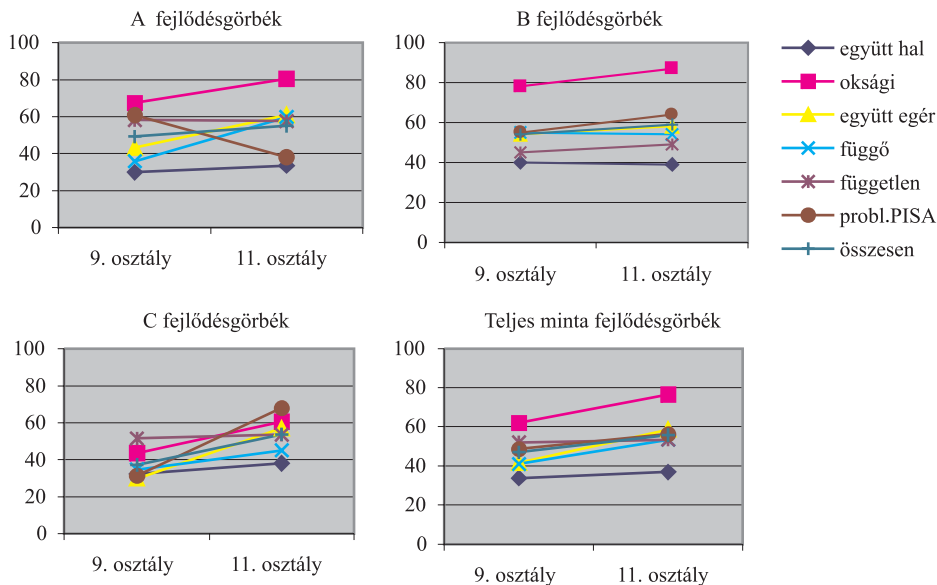
Évfolyam	Korrelatív			Funkció		Probléma- megoldás
	együttjárás hal	együttjárás egér	oksági	függő	független	
9. évf.	34	42	62	42	53	49
11. évf.	39	58	77	52	53	64
Együtt	37	50	70	47	53	57

később lesz szó.

Megállapítható, hogy a PISA feladaton kívül mindegyik feladatbeli teljesítmény javulást mutat az életkor, illetve az iskolában eltöltött idő növekedésével, sajnos a különbség a legtöbb esetben nem szignifikáns.

Összegzésképpen elmondhatjuk, hogy mindegyik gondolkodási terület fejlesztést igényel. Ez különösen igaz akkor, ha a spanyolországi (Battanero-féle) felméréssel vetjük össze a mi diákjaink eredményét (ld. később). Spanyolországban csekély volt a választ nem adók száma, továbbá a válaszokban fellelhetők voltak a valószínűségi problémák megoldásához szükséges gondolkodási stratégiák. Ez a mostani felmérésre sajnos nem igaz.

Az iskolánkénti fejlődésgörbék az iskolánkénti különbségekről árulkodnak. (1. ábra) Érdeemes megfigyelni, hogy a 9. és 11. évfolyam közötti fejlődés a C iskola esetében szembevető, míg a másik két vizsgált iskolánál nem tapasztalható látványos fejlődés. A jelenség magyarázata a plafonhatás lehet, azaz a tanulók elérték a korukra jellemző szintet, tovább már nehezen fejleszthetők. Ez azért is valószínű, mert a felmérésben szereplő két gimnáziumba jó képességű gyerekek járnak. További érdekesség a PISA feladaton elért eredmény különbsége az A és C iskolákban. Míg az A iskolában a teljesítmény romlott, addig a C iskolában a felsőbb évfolyamon jobb eredmény született. Ennek okai nem vilá-



gosak, de a feladatonkénti elemzésnél próbálunk magyarázatot találni erre a jelenségre.

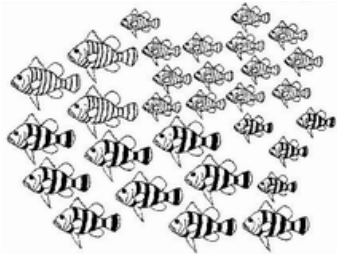
1. ábra. A fejlődésgörbék iskolánként, feladatonként

Érdemes megjegyezni azt is, hogy ebben a felmérésben az értékelhetetlen (0 pontos) válaszok száma nagyon magas volt. Ez annak tudható be, hogy a diákok az iskolában ritkán találkoznak ilyen típusú gondolkodást igénylő feladatokkal, számonkérés esetén is általában az órán hallott anyagot kell visszaadniuk. Nem tudják, hogyan kell megoldani egy problémát, amihez nem tanultak képletet vagy összefüggést. A PISA felmérésben jobb eredményt elérő országok diákjai ebben előttünk járnak.

### Feladattípusonkénti eredmények

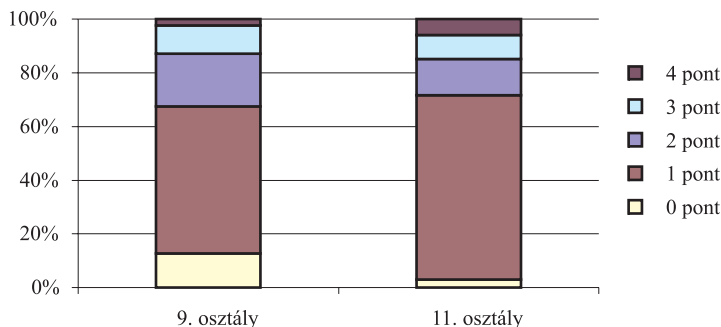
Ebben a részben a különböző feladattípusok eredményeit tekintjük át, és vizsgáljuk a két évfolyam közötti fejlődést. A hal-feladat a nemzetközi szakirodalomból is ismert, és rendszeresen megjelenik a valószínűségi gondolkodást vizsgáló tesztekben. Ebben a felmérésben nem feleletválasztós, hanem nyílt végű formátumban találkozhatunk vele. Itt két kétértékű változó (a csíkos halak mérete és a csíkok vastagsága) közötti statisztikus összefüggést kell felismerni az erősítő és gyengítő esetek alapján. (1. feladat)

#### 1. feladat. A hal-feladat



Pityu barátja akváriumában kicsi és nagy, továbbá keskeny és széles csíkos halakat figyelt meg. Összeszámolta a különböző típusú halakat, és lerajzolta az eredményt. Mit gondolsz van-e összefüggés a halak mintázata és a nagyságuk között? Válaszodat indokold!

Először a 9-ikes tanulók eredményeit vizsgáljuk meg. Az összes iskola átlagosan 34 százalék pontos teljesítményt nyújtott. Az egész évfolyamot tekintve a pontok eloszlását a 2. ábra diagramja mutatja. Azon tanulók, akik 3, illetve 4 pontot kaptak, felismerték az összefüggést a csíkozás és méret között, a 3 pontot kapók csak az egyik méret és csíkozás összefüggését ismerték fel. 2 pontot kaptak azok, akik felismertek ugyan valamilyen összefüggést, de azt nem vagy nem megfelelően indokolták. Összességében azt mondhatjuk, hogy a tanulók egyharmada észrevett valamilyen összefüggést (Piaget-i 2. csoport), azonban választát értékelhetően indokolni csak 13 százalék tudta (Piaget-i 3. csoport). Az iskolák eloszlását tekintve az A iskolába járók 30 százalékos, a C-ben tanulók 33 százalékos, a B diákjai 40 százalékos eredményt értek el.



2. ábra. A pontértékek évfolyamonkénti eloszlása az egér-feladatban

A 11. osztályosok 37 százalékos teljesítményt értek el, ami jobb eredmény, mint a 9. évfolyamosoké. Az eredményeket ugyancsak a 3. ábra mutatja. Az iskolánkénti eloszlást vizsgálva az A iskola tanulói 34 százalékot, a B diákjai 39 százalékot, C tanulói pedig 38 százalékot értek el. Az eredményeket összegezve kijelenthető, hogy ez a feladat volt a legnehezebb.

A hal-feladat már több előző kutatásban is szerepelt, így ezek összehasonlítási alapot szolgáltatnak. Itt csak két korábbi kutatás eredményeit használjuk fel. Az egyiket Bán Sándor végezte 7-es és 11-es diákokkal (Bán, 1998), a másikat pedig Bán Sándor felmérése alapján Bálint Erzsébet végezte el 9-es diákokkal. (Bálint, 2005) Mindkettő feleletválasztós feladat formátumú volt, azaz a kitöltőknek három lehetőség közül kellett választani (van, nincs vagy talán van összefüggés a különböző változók között). Az eredményeket a 2. táblázatban foglaltam össze.

2. táblázat. A hal-feladat eredményei különböző felmérésekben

Hal-feladat	7. osztály (%)	9. osztály (%)	11. osztály (%)
Bán Sándor	44,1	?	29,2
Bálint Erzsébet	?	38,9	?
Jelenlegi felmérés	?	34,0	37,0

Amíg a Bán Sándor-féle felmérés egyértelmű csökkenést mutat az együttjárasi valószínűségi gondolkodásban az iskolában eltöltött évek alatt, addig a jelenlegi tesztben számszerű, de nem szignifikáns növekedés mutatkozott. Bán Sándor felmérése nagyobb elemszámú volt, ez is okozhatja a különbségeket az eredményekben, azonban kínálkozik egy másik magyarázat is. 1995 óta változott a valószínűségszámítás és statisztika oktatásának módszere, új könyvek jelentek meg. Köztük például a „Sokszínű matematika” (Kosztolányi és mtsai, 2004), amelyből a felmérésben résztvevő diákok mindegyike tanul. A változás három reform – a NAT 1995, a kerettantervek, illetve a NAT 2003 dokumentumok által fémjelzett – keretében történt meg. Ezek a mélyreható átalakítások azonban nagyon sok időt vesznek igénybe, így egy még le nem zárult folyamatról beszélhetünk. (Bálint, 2005)

Az eredmények összehasonlítása után vizsgáljuk meg, hogy milyen típusú válaszok fordultak elő. A tanulók 27 százaléka írta, hogy „nincs összefüggés, mivel mindkét méretű halból van mindkét féle csikozású”. A tanulók 19 százaléka egyáltalán nem tudott mit kezdeni ezzel a feladattal, és nem írt semmi értékelhetőt. A diákok 15 százaléka vett észre összefüggést, de azt nem vagy nem értékelhetően indokolta. Csupán a diákok 8 százaléka vett észre összefüggést és indokolta helyesen a megállapítását.

A 11. osztályban a válaszok főbb típusai ugyanazok, mint 9-ben, a sorrend azonban máshogy alakul. A leggyakrabban (44 százaléokban) adott válaszban a tanulók nem vettek észre összefüggést, mivel mindkét méretű halból találtak kétféle csikozásút. A felmérést kitöltők 15 százaléka észrevette az összefüggést és helyesen is indokolt. 11 százalékuk nem válaszolt semmi értékelhetőt. A tanulók 5 százaléka észrevett összefüggést, de azt megindokolni nem tudta. A 11-eseknél felmerült még egy típusú válasz (8 százalék): nincs összefüggés, mert a kis halak a nagy halak fiatalabb egyedei – ez az összefüggés a 9-eseknél nem került elő. Továbbá három B-beli tanuló megpróbálta biológiai ismeretével megoldani a problémát, és a bohóchal fejlődésének és csíkok szélességének változásával próbálkozott összefüggést találni.

A másik, a korrelatív gondolkodás együttjárasi típusával foglalkozó, úgynevezett égerfeladat (2. feladat), nagyon sok felmérésben előkerült már, ezért választottuk mi is a feladatok közé, annak ellenére, hogy a feladatsorban már előfordul egy együttjárasi szabály felismerését vizsgáló feladat. Ebben a feladatban két kétértékű változó (a testméret és a

farkszín) közötti statisztikus összefüggést kell felismerni az erősítő és gyengítő esetek segítségével. A különbség a hal- és egér-feladat között az adatok megadásának formája volt. Míg a halas feladatnál rajzosan történt a megadás, az egér-feladatnál táblázatos formában megadott esetekből kellett következtetést levonni.

## 2. feladat. Az egér-feladat

Egerek típusa	Darabszám
Fehér farkú – sovány	81
Fehér farkú – kövér	19
Fekete farkú – sovány	9
Fekete farkú – kövér	31

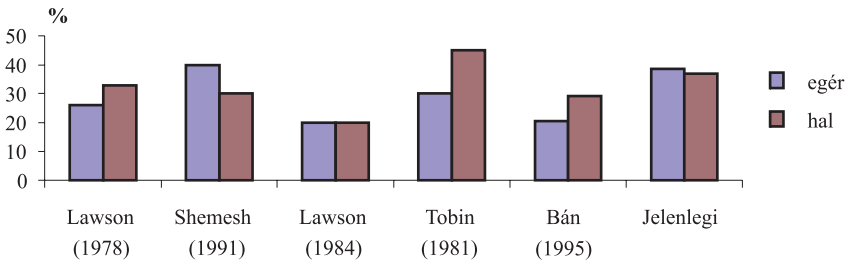
Egy gazda a tanyája körül kövér és sovány, továbbá fehér és fekete farkú egereket figyelt meg. Ez a megfigyelés kíváncsivá tette a gazdát vajon van-e összefüggés az egerek mérete és a farkuk színe között. Ezért megfogta az összes egeret, megvizsgálta, majd megszámolta őket. Az eredmény a táblázatban látható. Mit gondolsz, van-e összefüggés az egerek mérete és a farkuk színe között? Válaszod indokold!

Az eredményeket a 3. táblázat mutatja. Mivel ez a feladat nem szerepelt Bálint Erzsébet munkájában, csak Bán Sándor eredményeire támaszkodhattunk. (Bán, 1998) A mi felmérésünkben az egér-feladat könnyebbnek bizonyult. Ebben a felmérésben a tanulók sokkal jobban teljesítették ezt a feladatot, mint a hasonló típusú hal feladatot.

3. táblázat. Az egér-feladat eredményei a különböző felmérésekben

Egér-feladat	7. osztály (%)	9. osztály (%)	11. osztály (%)
Bán Sándor	20,7	?	20,5
Jelenlegi felmérés	?	32,0	39,0

Mivel ez az eredmény váratlan, ezért összehasonlítottuk néhány korábbi felmérés eredményeivel. Sajnos korábbi adataink csak a 11-es korosztály teljesítményeiről vannak. (3. ábra)



3. ábra. Az egér- és hal-feladat eredményei különböző felmérésekben (Bán, 1998 alapján)

A diagramról jól látható, hogy a különböző felmérésekben a tanulók nagyon különbözően teljesítettek. A korábbi felméréseknél az a tendencia vehető észre, hogy a két típusú feladaton elért teljesítmény között általában volt különbség. Ezen kívül a halas feladat jobban sikerült, mint az egeres. A most elvégzett felmérés azonban nem ezt az eredményt hozta, az eltérés nem szignifikáns. Az is észrevehető, hogy a jelenlegi felmérés eredményei az 1995-öshöz viszonyítva jobbak. Reményeink szerint ez a pozitív változás a tantervben történő sikeres változtatást tükrözi. Nemzetközi összehasonlításban ezek az eredmények nem kiemelkedők, de az átlagnál jobbak, bár ennek magyarázata a minta összetételében is lehet.

A jelenlegi felmérésben a két feladat eredményeinek különbségét két tényező okozhatta. Az egyik a feladat megadásának formája, hisz a hal-feladat rajzos formában szerepelt, az egér-feladat pedig táblázatos formában. Továbbá az egér-feladatnál a megadott esetek szá-



ma nagyobb volt. Az 1995-ös vizsgálat azt mutatta, hogy a rajzos és táblázatos megadási mód nem befolyásolta jelentősen a teljesítményt. Ezek szerint, erre a felmérésre támaszkodva, a leginkább befolyásoló tényező az esetek száma volt. A feladatban összesen több egér szerepelt mint hal, ez lehet a magyarázata az egér-feladaton elért jobb eredménynek.

A korrelatív gondolkodás másik, oksági típusát vizsgáló feladat Nemetz Tibor tan-könyvéből (2003) való. (3. feladat)

### 3. feladat. A labdarúgó-feladat

Egy edzőtáborban a kosarasok és a zsokéak vegyes csapata focimeccsre hívta ki a labdarúgókat. A győztes csapat testmagasságai nagyság szerint a következők (11 játékos+3 tartalék):

152; 157; 158; 160; 161; 168; 178; 179; 188; 188; 190; 192; 192; 198.

Mi a véleményed, melyik csapat volt a győztes? Válaszod indokold!

Ennek a problémának a megoldása sikerült a legjobban, oksági szabályt ezek szerint a tanulók könnyebben vesznek észre, mint együttjárás szabályokat. Ez nem meglepő, ha a két már korábban említett felmérés eredményeivel hasonlítjuk össze a feladaton elért eredményeket. (4. táblázat) Ez a feladat egyik felmérésben sem szerepelt, de jól látható az adatok alapján, hogy az oksági korrelatív gondolkodás sokkal fejlettebb mindkét kor-csoport esetében, mint az együttjárás típusú gondolkodási stratégiák.

4. táblázat. A korrelatív gondolkodás két típusának összehasonlítása

Felmérés	A teszt feladatainak eredménye %pontban					
	7. évfolyam		9. évfolyam		11. évfolyam	
	Oksági	együttjárás	oksági	együttjárás	oksági	együttjárás
Bán	67	35,1	?	?	74,7	41,5
Bálint	?	?	71,9	45,4	?	?
Jelenlegi	?	?	62,0	38,0	76,0	38,0

Tekintsük most át a válaszok különböző típusait. 4 pontot kapott az a tanuló, aki a ve-gyes csapatot jelölte meg győztesnek, és a magasságadatokkal indokolta választát. Elmé-letben két gondolkodási út létezett a 100 százalékos megoldáshoz. Az első esetében a ve-gyes csapat győzött, mert túl nagy a magasságkülönbség a csapattagok között, a labdarú-gók csapatának magassága egységesebb lett volna. A másik gondolkodási út az, hogy a győztes csapatban a kosarasok magasak, a zsokéak az alacsonyak. Elviékben ez a két meg-oldás különböző, hiszen az első típus statisztikai megfontolásokra támaszkodik, a máso-dik típus a saját mindennapi életből vett tapasztalatokat használja fel.

Ezen feladat eredményei tehát összhangban állnak az előzetes ismereteinkkel. Az ok-sági típusú feladatokon a diákok jobban teljesítenek, mint az együttjárás típusúakon. To-vábbá a diákok ezen a téren fejlődnek a legtöbbet a középiskolás évek alatt.

Annak vizsgálatára, hogy a diákok hogyan ismerik fel a függő és független eseménye-ket, két saját feladatot készítettünk. A feladatban szereplő nyerési esélyek vizsgálata a 11. évfolyamosoknak az iskolából jól ismert matematikai probléma, míg a 9. évfolyamosok erről középiskolában még nem tanultak. Éppen ezért ez a feladat alkalmas lehet arra, hogy megvizsgáljuk az iskolának a tanulókra kifejtett hatását. Természetesen arra nem számítottunk, hogy minden diák tudni fogja a választ, de azt már sikernek tekinthetjük, ha 11. osztályra érzik, hogy ez a két eset valami miatt különbözik.

Az egyik feladatnál két esemény függését kell megállapítani. A televízióból jól ismert sms-játékon való nyerési esélyeket latolgathatták a tanulók. (4. feladat) Tökéletes válasz-

nak az számított, ha a kitöltő rájött, hogy kétszer annyi beküldött sms-sel a nyeres valószínűsége nem nő pontosan a kétszeresére, a nyeres valószínűsége ugyanis függ az összes beküldött sms számától is, ami szintén növekszik.

#### 4. feladat. Az sms-feladat

Valaki egy sms játék kezdetén 10 sms-t küld el. A beküldők között egy értékes DVD csomagot sorolnak ki. Ha valaki több sms-t küld, nagyobb az esélye a nyeresre. Igaz-e az, hogy ha ez a valaki 20 sms-t küld be ugyanerre a játékra, akkor kétszeresére növeli a nyeresi esélyeit? Válaszodat indokold!

A következő feladatban független események jelentek meg, a lottózással foglalkozunk. Itt a kérdés az volt, hányszorosára nőttek a nyeres esélyeit. (5. feladat)

#### 5. feladat. A lottó-feladat

János bácsi nagyon szeretne nyerni az 5-ös lottón. A hét elején vesz 10 darab lottót, mind a tizet különbözőképpen kitölti és feladja. A hét végén még vesz további 10 lottót, azokat is kitölti, mindet különbözően. Hányszorosára növelte így a nyeresi esélyeit? Válaszod indokold!

Itt már igaz az, hogy kétszer annyi különbözően kitöltött lottószelvényvel a lottózó kétszer akkora valószínűséggel nyer, ebben az esetben a nyeres valószínűsége csak a különbözően kitöltött szelvények számától függ, a pusztá szelvényszámától nem. Az eredményeket az 5. táblázat mutatja.

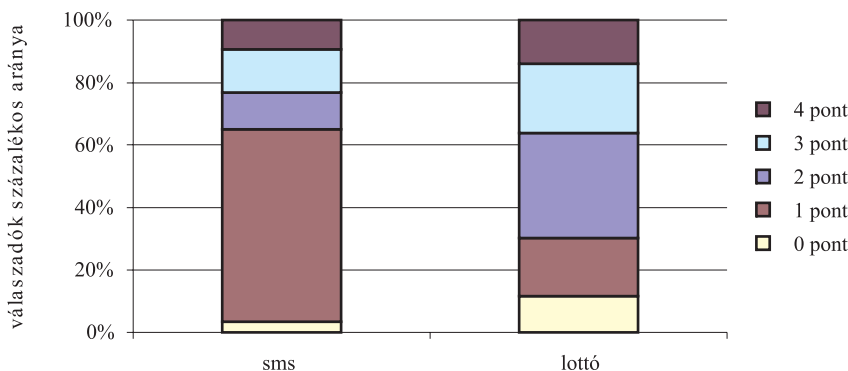
5. táblázat. Az SMS- és lottó-feladat eredményei a két évfolyamon

Iskola	9. évfolyam		11. évfolyam	
	SMS feladat	lottó feladat	SMS feladat	lottó feladat
A	36	58	60	58
B	55	45	54	49
C	35	52	45	54
Együtt	42	52	53	53

A táblázatból leolvasható, hogy a lottó-feladat átlagban valamivel jobban sikerült, mint az sms-feladat, azonban figyelembe kell vennünk, hogy a feladatok szerkezete hogyan befolyásolhatja az eredményeket.

Az sms-feladatban az „Igaz-e, hogy kétszeresére növeli az esélyeit?” kérdésre kellett válaszolni. A lottó-feladatban a következő problémát kellett megoldani: „Hányszorosára növelte a nyeresi esélyeit?” Az sms-feladat sorrendben megelőzte a lottós feladatot, így sok diák gondolkodás nélkül írta: „kétszeresére”. Ami valóban igaz, de indoklás nélkül egyáltalán nem lehetünk biztosak abban, hogy a helyes gondolatmenettel jutott el a megoldásig. Ezért ezen válaszok 2 pontot érnek, az indoklás helyességétől függően további 1 vagy 2 pontot adtam. Vizsgáljuk meg a pontok gyakorisági eloszlását! (4. ábra)

A diagram a 9. évfolyam eredményeinek eloszlását mutatja, de a 11. évfolyamon is ugyanez a tendencia figyelhető meg. A grafikonról leolvasható, hogy a függő eseményeket vizsgáló feladatban 0 és 1 pontot kapók megközelítően ugyanannyian vannak, mint a független feladatban 0, 1, illetve 2 pontot szerzők. A jobb átlagos eredmény onnan származhat, hogy míg a lottó-feladatban 2 pontot már egyszerű másolással, tippeléssel is el lehetett érni, addig az sms-feladatban már a 2 ponthoz is helyes gondolatmenet volt szükséges. Ismét bebizonyosodott, hogy a feladatok kiválasztásánál fontos szempont, hogy a tippelés lehetőségét minimálisra csökkentsük.



4. ábra. Az SMS- és lottó-feladatok pontjainak gyakorisági eloszlása a 9. évfolyamon

Érdeemes további vizsgálatokat végezni a két feladat eredményein. A korrelációs együtthatókat megvizsgálva a két feladat eredményeinek korrelálnia kell, hiszen ezek a feladatok ugyanarra a gondolkodási sémára, a függő és független események felismerésre épülnek. Következésképp, aki az egyik feladatot meg tudta oldani, nagyobb valószínűséggel tudja teljesíteni a másik feladatot is. Ez azonban meglepő módon nem teljesül, a korrelációs együtthatókat 6. táblázat mutatja.

6. táblázat. Korrelációs együtthatók az sms- és lottó-feladat esetén

Korrelációs együttható a két feladat között	9. évfolyam	11. évfolyam
	-0,5	-0,45

A korreláció szignifikáns. Ez alapján a két feladat valóban összefügg, azonban az elvárttal ellentétesen. A meglepő eredmények magyarázata lehet, hogy: a diákok az egyik feladatban megállapított gondolkodási módszert folytatták a másik feladatnál is, miközben a két probléma különböző stratégiát várt volna el. Ezenkívül, a korábban már említett tippelés is befolyásolhatta az eredményeket, azonban ez önmagában nem magyarázza az értékeket.

Vegyük észre azt is, hogy a függő események vizsgálata a 11. évfolyamon jobb átlageredményt hozott, mint a 9. évfolyamon, tehát fejlődést figyelhetünk meg. Sajnos a független eseményeket vizsgáló lottó-feladatban nem érzékelhető ez a pozitív változás.

A további két feladatban a valószínűségi gondolkodás eddig vizsgált részfolyamatait kellett összetetten alkalmazni. A valószínűség fogalmának kialakulását, fejlődését vizsgáló feladatból sok megállapítást szűrhetünk le. Battanero (1998) kutatásából származó probléma az érmedobálás törvényszerűségét kutatja. (6. feladat)

6.feladat: Az érme-dobálás feladat

Néhány gyerek azt kapta feladatul, hogy dobjon fel egy érmét 40-szer. Néhányan valóban elvégezték a feladatot, de néhányan csak kitalálták a végeredményt. A feljegyzésnél a fejet F, az írást I jelöli. Ezek Dávid és Dia eredményei:

Dávid: F I F I I F F I F I F F I I F I I F F I I F I F F I I F I F I F I F I F I F I F I  
 Dia: F I I I F I I F I F I I I F I I I I F F I I I F I I F I I F I I I I F I I I F I

Mivel itt nincs helyes vagy helytelen válasz, ezt a feladatot nem pontoztuk, csak a válaszok típusát, gondolkodási stratégiáját vizsgáltuk. Ez a feladat már szerepelt spanyol

diákok felméréjében, amely összehasonlítási alapot is szolgáltat. Táblázatba foglaltuk az akkori és a jelenlegi felmérés válaszainak eloszlását. (7. táblázat)

7. táblázat. A spanyol és a magyar felmérés válaszai

Választípus	14 évesek (n=147)		15 évesek (n=86)		17 évesek (n=66)		18 évesek (n=130)	
	Dávid	Dia	Dávid	Dia	Dávid	Dia	Dávid	Dia
Ő csalt	36	56	50	55	52	57	23	49
Ő elvégezte	56	36	12	7	12	7	63	37
Nem eldönthető	8		25		34		14	
Nincs válasz	?		13		2		?	

Figyelemre méltó eredmény, hogy a mi felmérésünkben nagy az értékelhető választ nem adók aránya. Továbbá a spanyol mintával összehasonlítva a válaszolók közül sokan nem találtak szempontot, ami alapján vizsgálódhatnának, ezért gondolták, a válasz nem eldönthető. Mindezek arra mutatnak, hogy ez a típusú feladat meglepte a diákokat. Nincsenek hozzászokva olyan feladatokhoz, amelyek megoldására nincs egyértelmű szabály, ami alapján döntést hozhatnának.

További érdekesség, hogy akik letették a voksukat, a csalás lehetőségét emelték ki, nem az elvégzését. Összehasonlításképpen, a spanyol mintában ez az arány megközelítőleg megegyezik. A leggyakrabban előforduló indoklások: „A fejek és írások sorrendje túl szabályos, szinte váltakozik.” „A fejek és írások gyakorisága túl különböző.” „Előfordul, hogy sok dobáson keresztül ugyanaz jön ki, gyakrabban kellene váltakozniuk.”

Ebben a feladatban nem volt helyes vagy helytelen válasz, ezért a diákok indoklására koncentráltunk a válaszok elemzésénél. Fontos szempont volt a valószínűségről kialakított kép bonyolultsága, illetve hogy milyen gondolatmenettel jutott el a válaszig.

A tanulók különféle stratégiát alkalmaztak. Mivel Dávid sorozata egyenletesebb volt, aki úgy gondolta, ő végezte el a dobásokat. Mivel Dia sorozata kevésbé volt kiegyensúlyozott, sokan azt gondolták, ő csalt. Ezek a diákok összevetették a leírásban szereplő fejek és írások gyakoriságát az egyenlő gyakoriság miatt elméletileg várt gyakorisággal. Ha a vizsgált gyakoriság túlzottan eltért a várttól, úgy gondolták, az nem lehet a véletlen műve.

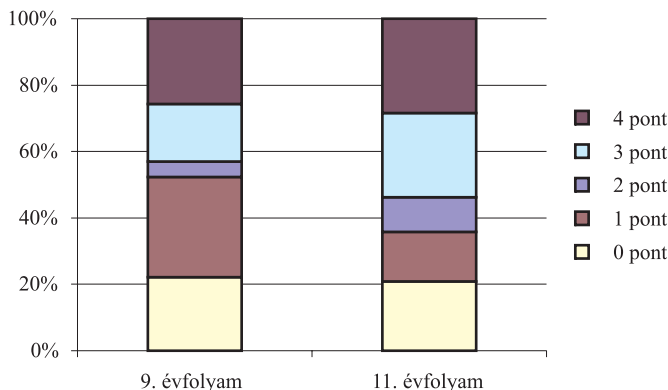
Más diákok az egymás utáni azonos dobások számát figyelték. Ha négy vagy öt egyforma dobást találtak egymás után, a dobásokról már nem hitték el, hogy véletlen volt. A megfigyelő már kis számú kísérlet esetén is a törvényszerűség alapján valószínű eredményt várja. (Konold, 1989) Tekintsünk át néhány további lehetséges stratégiát a feladat megoldására! A fejek és írások sorrendjét elemezve megállapítjuk, túl szabályos ahhoz, hogy véletlen legyen. További lehetőség, hogy nem tudjuk eldönteni, hogy melyikük csalt, mert a véletlen események megjósolhatatlanok.

A másik összetett problémamegoldási stratégiát elváró feladat a 2003-as PISA minta-feladatai közül való. (7. feladat) Ez a feladat tulajdonképpen a geometriai valószínűség témaköréből való feladat. Várakozásaink szerint a 11. évfolyamosok jobban teljesítenek ezen a feladaton, azaz a valószínűséget befolyásoló tényezők között felsorolják az érme és a kis négyzetek méretének egymáshoz viszonyított arányát.

#### 7. feladat. A PISA vizsgálatból vett feladat

Játékosok érmét dobálnak egy sakktáblára. A tábla fekete és fehér négyzetekből épül fel. Ha az érme úgy esik, hogy mindkét színű négyzetből elfed részeket, akkor a játékos elveszti az érmét. Ha legurul a tábláról, akkor újra dobhat. Ha azonban az érme csak az egyik színű négyzetre esik, akkor a játékos visszakapja az érméjét és kap mellé egy ajándékot. Mi befolyásolhatja a játékosok nyerési esélyeit? Válaszod indokold!

4 pontot kaptak azok, akik az érme és négyzet mérete közti viszonyt jelölték meg befolyásoló tényezőnek. 3 pontot azok a tanulók kaptak, akik az érme és a négyzetek méretét is megemlítették befolyásoló tényezőként. 2 pontot kaptak azok, akiknek válaszában megjelent vagy az érme, vagy a négyzetek mérete. 1 pontot pedig azok, akik olyan befolyásoló tényezőket említenek, mint a dobás magassága, a dobás mérete stb. 0 pontot azok kaptak, akik semmi értékelhetőt nem írtak. Ide tartoztak például az olyan válaszok is, hogy „nem függ a nyeresé semmitől, csak szerencse dolga, csak a véletlenül múlik”. Ezek a diákok úgy tűnik, még soha nem találkoztak a valószínűség fogalmával, vagy legalábbis nem úgy, hogy azt egy egyszerű játék keretében is alkalmazni lehessen. A gyakorisági eloszlások segítségével vizsgáljuk meg a válaszok alakulását. (5. ábra)



5. ábra. A PISA feladat pontjainak gyakorisági eloszlása

Leolvasható, hogy a 0 és 4 pontot kapók százalékos aránya mindkét évfolyamon közel azonos. Fejlődés azonban így is tapasztalható, hiszen összességében a 11. évfolyamon többen kaptak 2, illetve 3 pontot, mint 1-et. Tehát többen hozták a nyeresé valószínűség összefüggésbe az érme, illetve a négyzetek méretével.

Összesítésben ezen feladat megoldásában fejlődés tapasztalható az évfolyamok között, annak ellenére, hogy az A iskola diákjainak fejlődése inkább negatív irányú. Azonban ez a 11. osztály a többi feladaton is gyengén teljesített.

### Összefoglalás

Tanulmányomban a valószínűségi gondolkodási stratégiák fejlődését, ezzel együtt a középiskolában tanított valószínűségszámítás hasznosíthatóságát vizsgáltuk egy felmérés segítségével. A kutatás fő célja annak vizsgálata volt, hogy milyen szintű és milyen fejlődést mutat a középiskolás tanulók valószínűségi és korrelatív gondolkodása.

A vizsgálat eszköze egy feladatlap volt, melynek hét feladata között találhatóak régi, jól ismert, nemzetközi vizsgálatokban is szereplő és új feladatok is. A feladattípusok között megtalálható a korrelatív gondolkodás együttjárás és oksági típusát vizsgáló feladat, az események függőségének vagy függetlenségének megállapítását elváró probléma, továbbá az összetett valószínűségi problémamegoldás fejlettségét elemző feladat is. Ezek mindegyike nyílt végű, tehát önálló szöveges választ igényelt. A felmérés három szegedi középiskola 86 9. osztályos és 69 11. osztályos tanulójának részvételével történt. A viszonylag kis elemszám miatt csak hozzávetőleges képet adhat a valószínűségi és statisztikai gondolkodás alapjainak fejlődéséről.

Az elemzés során hagyományos statisztikai és kvalitatív módszereket is használtunk. Ezek alapján számszerűen kimutatható fejlődés a valószínűségi gondolkodás különböző

területein, azonban ez kevés feladat esetén szignifikáns. Fény derült többek között arra is, hogy az ok-okozati összefüggések vizsgálatában a diákok jobb eredményt értek el, mint az együttjárási problémáknál. Megállapíthatjuk továbbá, hogy a középiskolás korosztályban az oksági viszony keresésének gondolkodási stratégiája fejlődik leginkább. Ez a tendencia a nemzetközi vizsgálatok eredményeivel megegyezik.

A feladatok elemzésekor kiderült, hogy a magyar diákok számára az ilyen gondolkodási stratégiákat igénylő problémák szokatlanok, nincs még kialakult megoldási sémájuk. Ez a tény azért is figyelemre méltó, mert a nemzetközi mintában találunk olyan nemzeteket, amelyeknek a diákjai az ilyen típusú felméréseken jobban teljesítenek. Ezeknél az országoknál általában már korábban célul tűzték ki a problémamegoldásra és valószínűségi gondolkodásra nevelést.

A felmérés során már ismert jelenségeket is tapasztaltunk. Például a feladatok egymásra hatása fontos befolyásoló tényező lehet, nem mindegy, hogy milyen feladatok kerülnek egymás mellé.

Annak ellenére, hogy ez a felmérés nem volt reprezentatív, megállapítható, hogy a diákok valószínűségi gondolkodása nagy különbségeket mutat. A korábbi kutatások eredményeihez képest kisebb mértékű javulás tapasztalható, de szükséges a gondolkodási stratégiákat fejlesztő módszerek, játékok kifejlesztése. Az általunk végzett felmérésből messzemenő következtetések nem vonhatók le a kis mintaelemszám, az iskolák kis száma miatt. A kutatást tehát érdemes kiterjeszteni magasabb és alacsonyabb évfolyamokra, illetve ugyanezt több iskola bevonásával elvégezve, biztosabb eredmények kaphatók.

### Irodalom

- Bálint Erzsébet (2005): *A statisztikatanítás eredményessége a kerettanterv, az alkalmazható tudás és a korrelatív gondolkodás tükrében a gimnázium kilencedik évfolyamán*. Szakdolgozat, Szegedi Tudományegyetem, Szeged.
- Bán Sándor (1998): Gondolkodás a bizonytalanról: valószínűségi és korrelatív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest. 221–250.
- Batanero, C. – Henry, M. – Parzycz, B. (1998): The nature of chance and probability. In: Jones, G. (szerk.): *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Szerk.: Jones, G. Kluwer Mathematics Education Library Series, Dordrecht.
- Csapó Benő (1999): Képességfejlesztés az iskolában problémák és lehetőségek. *Új Pedagógiai Szemle*, 12. 4–12.
- Csapó Benő (2002): A tudáskonceptió változása: nemzetközi tendenciák és hazai helyzet. *Új Pedagógiai Szemle*, 2. 38–45.
- Konold, C. (1989): Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59–98.
- Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István (2004): *Sokszínű matematika*. Mozaik Kiadó, Szeged.
- Nagy József (2000): Összefüggés-megértés. *Magyar Pedagógia*, 2. 141–185.
- Nemetz Tibor (2003): *Valószínűségszámítás*. Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest.