Kelemen Rita
Neveléstudományi Tanszék, Pedagógiai és Pszichológia Intézet, BTK, SZTE

Nemzetközi tendenciák a matematikai szöveges feladatok elméletében

Nagy figyelmet keltettek Magyarországon is azok a nemzetközi összehasonlítást lehetővé tevő eredmények, amelyek alapján egyesek PISA-sokkról beszélnek, és radikális változásokat követelnek, míg mások az angolszász országoknak kedvező feladatok megoldottsági mutatóiból nem kívánnak messzemenő következtetéseket levonni.

Feltűnő, hogy míg például a PISA-mérés egyes feladatait tekintve csekély különbségek vannak az országok között (ezek az egyszerűbb feladatok, amelyek megoldottságának szoros sorrendjében Magyarország általában jó helyen áll), addig más feladatok széthúzzák a mezőnyt, és éppen ezeknél figyelhető meg relatíve nagyobb lemaradásunk. (*Vári*, 2003) Az országok átlagai között jelentősebb különbségeket hozó feladatok általában közelebb állnak az „életszerűnek" nevezett problémákhoz, és a feladatok mechanikus, rutinszerű megoldása helyett valamilyen megoldási terv, stratégia kialakítását igénylik.

A matematika szerepe, célja az oktatásban

A matematikai szöveges problémák megoldását kísérő mentális folyamatok működésére fókuszáló kutatások messzire nyúlnak vissza. *Pólya György,* a kiváló magyar matematikus és pedagógus 1962-ben a matematikai szöveges feladatok megoldását vizsgálva a következőket fogalmazta meg: „A szöveges feladatok egyenletekkel történő megoldása közben a diákoknak a valós szituációt a matematika nyelvére kell lefordítaniuk. Mindez lehetőséget ad arra, hogy a diákok megtapasztalják a matematikai fogalmak és a valós dolgok között húzódó kapcsolatokat. De az így kapott kapcsolatokkal óvatosan kell bánni." (*Pólya*, 1962)

A kilencvenes években sokasodtak meg azok a kutatások, amelyek azt vizsgálták, hogy a diákok iskolai környezetben matematikai szöveges feladatok megoldásakor mennyire és miként alkalmazzák (illetve hanyagolják el) a valós világról szerzett ismereteiket, tapasztalataikat. Az első eredmények sokkolóan hatottak. Rövid időn belül egyre több szakember kezdett a jelenség vizsgálatával foglalkozni.

Az eltelt több mint tíz év alatt számos olyan kutatási eredmény született, melyek bőséges bizonyítékokkal szolgálnak afelől, hogy a diákok iskolai környezetben, matematikai szöveges feladatok megoldása közben tendenciaszerűen elhanyagolják a valóság-közeli meggondolásokat, és probléma-megoldásukból kizárják a valós világról szerzett ismereteiket, tapasztalataikat. Sőt, az tapasztalható, hogy a józan ész logikáját, a realisztikus megfontolásokat a diákok egy átlagos szöveges feladat megoldásában inkább ártalmasnak, mint hasznosnak vélik.

A téma népszerűsége feltehetőleg annak a disszonanciának is tulajdonítható, mely – a kutatások szerint – a matematikaoktatás célkitűzései és a matematikaoktatás eredményei között fennáll. Az iskolai matematika tantárgy egyik legfontosabb, nemzetközi és hazai fórumokon egyaránt deklarált szerepe, hogy felkészítse a diákokat az életben való eligazodásra életszerű problémák megismerésével és azok megoldásának begyakorlásával. „Alapvető célunk a megértésen alapuló gondolkodás fejlesztése, a valóságos szituációk és a matematikai modellek közötti kétirányú út megismertetése, és azok használatának fokozatos kialakítása" – olvashatjuk a Nemzeti Alaptantervben. (*NAT*, 1995) Ezzel egybevág az a nemzetközi megállapítás is, miszerint „a modern matematikaoktatás fő célkitűzése, hogy felkészítse az embereket az úgynevezett való életből vett feladatok megoldására". (*Wyndhamn és Säljö*, 1997)

A hagyományos matematikaoktatással szembeni kritikák leggyakrabban a matematikaoktatás módszertanát és céljait (céltalanságát) támadják. A 20. század második felében meginduló matematikaoktatási reformmozgalmak közös törekvése, hogy az iskolai matematikaoktatás a gondolkodás fejlesztésére, az értelem kiművelésére koncentráljon, valamint az életben hasznosítható tudást közvetítsen. (*Csapó*, 2003) Ezek a törekvések azt is jelentik egyben, hogy a korábban szinte kizárólag tartalmi reformok helyett a figyelem a matematikaoktatási folyamatok, a tanulók felé irányul.

Romberg (1992, idézi *Csíkos* és *Dobi,* 2001) szerint a tantárgyi változások egyik motorja az üzleti élet lehet. Azaz egy késleltetett visszacsatolás által a közoktatásnak rá kell döbbennie arra, hogy napjaink munkaerőpiacán az elemzők, problémalátók, -megoldók iránt nagy a kereslet, ezen képességeknek nagy a piaci értéke, tehát az oktatásban egyre nagyobb hangsúlyt érdemes fektetni az ilyen jellegű képességek kiművelésére.

A magyar közoktatásban felfedezhető az a törekvés, hogy a nagymennyiségű ismeretanyag átadása helyett a produktív képességek fejlesztése kerüljön középpontba. A matematikára vonatkoztatva ez a változás azt eredményezheti, hogy az egyenletek, az algoritmikus, szimbólumokkal számoló feladatok helyett a szöveges, valós környezetbe ágyazott problémák kerülnek előtérbe, melyek a „valóság-modellező" és a „probléma-megoldó" elvárásoknak egyaránt eleget tesznek.

Számos ország matematika oktatása jelentős változásokon ment át az elmúlt 50 évben. *Ambrus András* ‚Nemzetközi tendenciák a matematika oktatásában' című műve nyomán az alábbiakban a témánkat legmarkánsabban érintő irányzatokról szólok dióhéjban.

Az 1960-as években a matematika-didaktikát az „Új Matematika" névvel fémjelzett irányzat mozdította ki addigi stabil medréből. A számos országban elterjedt irányzat a matematikát zárt, deduktív rendszerként, a matematikai struktúrákat szem előtt tartva, a szaknyelv és a szimbólumok használatát hangsúlyozva, az absztrakt, felsőbb matematikának az általános és a középiskolába való levitelével tanította. Kritikája az az egységes tapasztalat, hogy az axiomatikus felépítésnek nincs létjogosultsága a középiskolában, csak a lokális logikai rendezésnek.

Hollandiából indult ki a „Realisztikus matematika" mint oktatási irányzat, melyben a „realisztikus" jelző nem szükségszerűen jelent valóságból vett jelenségeket, objektumokat, hanem a tanuló szempontjából abban az értelemben reális, realisztikus, hogy „elképzelhető, jelentéssel bíró" a számára. A fent már idézett Pólya György nevéhez kötődik a problémaorientált, -felvető matematikaoktatás, mely a nyolcvanas években leginkább az USA-ban terjedt el. De például Norvégiában is a középiskola utolsó három évében „problémaalkotás, modellalkotás" fejezetek szerepelnek a tankönyvekben, ahol a modellalkotás elnevezés a gyakorlati jellegű problémákra utal. Angliában a 10., 11. osztályokban egy tisztán matematikai probléma mellett egy alkalmazási problémát is önállóan fel kell dolgozniuk a diákoknak, a valós szituáció problémafelvetéseiből, problémamegoldásaiból esszét írnak.

Hazánkban is jelentős törekvések figyelhetők meg egy jobban használható és a világ változásaival lépést tartó matematika formálására. A NAT a matematikaoktatás céljai és feladatai közül leginkább a megszerzett matematikatudás „világi”, iskolán kívüli használhatóságát, valamint az önálló gondolkodás, problémalátás fejlesztését, a problémamegoldói stratégiák elsajátításának fontosságát hangsúlyozza. Ambrus András és *Vancsó Ödön* (1998) a „gyakorlatorientált” jelzőt vezették be a magyar köztudatba, az egyoldalúan csak elméleti, absztrakt matematikaoktatással szemben.

Régóta ismert, és talán egyre szélesebb körben elfogadott elv (*Csapó*, 1992), hogy ma csaknem lehetetlen körülhatárolni azoknak az ismereteknek a körét, amelyekre a következő generációknak szükségük lesz. Egyre kevésbé tűnik definiálhatónak a jövőben szükséges készségek, képességek köre. Ami talán kétségbevonhatatlanul szükséges lesz pár évtized múlva is a hatékony információ-feldolgozáshoz, és így az életben való boldoguláshoz, az a tanulással kapcsolatos ismeretek és készségek megszerzése. A magyar közoktatásban felfedezhető az a törekvés, hogy a nagymennyiségű ismeretanyag átadása helyett a produktív képességek fejlesztése kerüljön középpontba. A matematikára vonatkoztatva ez a változás azt eredményezheti, hogy az egyenletek, az algoritmikus, szimbólumokkal számoló feladatok helyett a szöveges, valós környezetbe ágyazott problémák kerülnek előtérbe, melyek a „valóság-modellező” és a „probléma-megoldó” elvárásoknak egyaránt eleget tesznek.

Egyszerű, egy vagy több alapművelettel megoldható szöveges feladatok

Általánosnak mondható az a megfigyelés, hogy a tanulók jóval nehezebben oldanak meg szöveges problémákat, mint aritmetikai, számolós feladatokat. (*Vidákovich és Csapó*, 1998; *De Corte*, 2001; *Dobi*, 2002) Feltételezhető tehát, hogy a probléma megértése, illetve annak „matematikára fordítása” okoz nehézséget, ami figyelmünket a matematikai problémamegoldás folyamatának két fő szakasza (reprezentáció, kivitelezés) közül a probléma-reprezentáció vizsgálata felé fordítja.

Probléma-reprezentáción a megoldási eljárás olyan mozzanatait értjük, melyek a probléma feltérképezésével, megértésével, matematikai műveletekre való fordításával, egy lehetséges megoldási terv készítésével állnak összefüggésben, míg a megvalósítás a reprezentáció során kitűzött aritmetikai, algebrai műveletek elvégzését jelenti. (*Mayer és Hegarty,* 1998)

A reprezentáció összetett halmazát a közelebbi megismerés végett tovább bonthatjuk a transzláció, az integrálás, a tervezés folyamataira. A transzláció a problémában szereplő minden fontos kijelentés reprezentációjának előállítását jelenti. Az integrálás a problémabeli helyzet felismerését, a problémában szereplő jelenségek egymáshoz való viszonyainak megállapítását foglalja magában. A tervezés a probléma megoldásának megszerkesztését jelenti.

Az a tény, hogy a tanulók sok esetben eredményesen szerkesztenek meg és hajtanak végre olyan számolási terveket, melyek a probléma helytelen reprezentálásán alapszanak, a transzláció és az integrálás fontosságára és egyben nehézségeire mutat rá. Feltehető, hogy a problémamegoldás egyik kulcsa azokban a folyamatokban rejlik, amelyekben a tanulók a matematikai problémák megértésére törekszenek, hiszen az esetek túlnyomó többségében a megvalósítás rutinszerű, de a reprezentáció nem az. Összességében azt állíthatjuk, hogy a matematikai feladatok megoldásában a probléma jelentésének felismerése a legkreatívabb mozzanat, és a megoldás sikeressége a helyes reprezentálási stratégia megválasztásán múlik. (*Mayer és Hegarty,* 1998)

Szöveges feladatnak mondhatunk minden olyan matematikai problémát, melyben valamely aritmetikai, algebrai feladat valós szituációba van ágyazva, és minden olyan életbeli problémát is, melynek megoldásához matematikai eljárások szükségesek. Az iskolában a tanulók számára kitűzött szöveges feladatok túlnyomó többsége az első csoportból való, hiszen az iskola a matematikát témakörök szerint tanítja, és a szöveges feladatokat a matematikai eljárások begyakoroltatására használja. Az egyszerű, egy vagy több alapművelettel megoldható szöveges feladatokra irányuló kutatások fejlődéséből *Csíkos Csaba* (2004) a következő elméleteket emeli ki jelentős állomásokként.

Az első mérföldkőnek *Kintsch* és *Greeno* (1985) elméletét tekinti, akik a matematikai szöveges feladatok megoldásának menetét számítógépes analógiával, algoritmikus úton modellezték. A hiányzó adat (a feladat kérdése) és a megfogalmazás jellege szerint számos feladattípust különböztettek meg. Leírták, hogy egy adott matematikai művelethez – a megfogalmazás lehetséges eseteit figyelembe véve – milyen lépések egymásutánjával történik a feladatmegoldás. A modell két fő jellegzetessége, hogy a feladatmegoldást szekvenciálisan, azaz az egymás utáni lépések sorozataként írja le, valamint figyelembe veszi a rövid távú memória korlátjait, azaz egyenes összefüggést feltételez a szükséges lépések száma és a feladatmegoldás nehézsége között. A modell egyik megkerülhetetlen hibája, hogy a feladatmegoldás a tartalom-függetlenségre épül, melynek cáfolatát számos kognitív pszichológiai kutatás támasztja alá. (*Csapó*, 2003)

A második állomást *Mayer* és *Hegarty* (1998) munkái fémjelzik. Szerintük a szöveges feladatok megoldása abban különbözik a nem szöveges feladatok megoldásától, hogy a helyes feladatmegoldásnak elengedhetetlen feltétele a probléma helyes reprezentálása, majd matematikára fordítása. A reprezentáció fontossága mellett a modell másik alapvető gondolata a feladatmegoldás folyamatának ciklusokkal, elágazásokkal való leírása, mely ciklusok és elágazások a feladat szövegének olvasása és a megoldási terv készítése között jelennek meg.

A feladatmegoldónak a problémához való viszonyulása szerint a megoldási stratégiák között két lényegesen eltérőt különböztetnek meg. A feladatmegoldók egyik csoportja a közvetlen transzlációs stratégiát követi, ami azt jelenti, hogy a szöveges feladatok megoldása során első lépésként a számokat és a kulcsszavakat ragadják ki a feladatból, és ennek alapján próbálnak aritmetikai műveleteket kitűzni. Ez a megközelítési mód röviden úgy foglalható össze, hogy „előbb számolunk, s csak azután gondolkodunk", vagy utána sem. Azaz a kvalitatív megfontolásokat megelőzik a kvantitatív variálások.

A másik leírt megoldási eljárás a probléma-modellező stratégia. Azok a problémamegoldók, akik ezzel a megközelítéssel látnak munkához, először a problémában leírt helyzet megértésével foglalkoznak, majd a szituáció reprezentációján nyugvó megoldási tervet szerkesztenek. Ez esetben a probléma modellezése a probléma megértésén alapuló, elmélyülő racionális megközelítés, tehát a probléma-szituáció kvalitatív megértésének kialakításából áll. A matematikai probléma-modellezési eljárás követi a probléma-reprezentáció lépéseit (transzláció, integrálás, tervezés), és ezek helyes elvégzése vezet célhoz.

Mayer és Hegarty a szöveges problémák megoldásának kutatása alapján az alábbi konklúziót vonja le: „...a szöveges problémák megoldásbeli nehézségeinek forrása inkább a problémák reprezentálásában van, mint a megoldási eljárás végrehajtásában, a problémák reprezentálásának nehézsége inkább a kapcsolatteremtő kijelentések értelmezése, mint a kijelöléseké, a kapcsolatteremtő kijelentések értelmezési nehézségei pedig a közvetlen transzlációs stratégiával szemben a problémamodellező stratégia használatát kívánják."

Mély struktúra, kontextus, tartalom

A szöveges feladatok megoldását kísérő folyamatok minél pontosabb megismerése végett célravezető lehet a matematikai szöveges feladatok szerkezetében három szint megkülönböztetése egymástól: matematikai mély struktúra, kontextus és tartalom.

Matematikai mély struktúrán azt a szerkezetet értem, melyet adott esetben matematikai nyelvre lefordítva egy algebrai, aritmetikai matematikai jelekből álló példát kaphatunk. A mai matematika-oktatás a matematika órán alkalmazott szöveges feladatokat azok mély struktúrája szerint csoportosítja, és egy-egy művelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) megtanulása után a műveletvégzés begyakoroltatására használja. Annak ellenére, hogy a diákok az iskolában a szöveges feladatoknak a mélystruktúra szerinti felosztásával találkoznak, ők maguk ezt a csoportosítást igen nehezen tudják elvégezni. (*Kercood*, *Zentall és Lee*, 2003) Az alsó tagozat végére a diákok többsége gond nélkül oldja meg a szöveges feladatokként tálalt aritmetikai műveleteket. Ezt a tényt igazolják azok a kutatások, melyek a realisztikus feladatok mellett egy vagy két aritmetikai művelettel megoldható hagyományos feladatokat is alkalmaztak vizsgálataik során. (*Verschaffel*, *De Corte és Lasure*, 1994; *Csíkos,* 2002, 2003; *Russer* és *Stebler,* 1997; *Kelemen,* 2004)

A szöveges feladatok kontextusán a feladatok prezentálásának körülményeit értjük, azaz a feladathelyzetre vonatkozó verbális és nem verbális kommunikációt. *Butterworth* (1993) szerint a kontextusnak nincs széles körben elfogadott definíciója, de a kontextuson mindnyájan egy bizonyos feladat megjelenésének fizikai, szociális és kulturális jellemzőit értjük.

A matematikai szöveges feladatok esetében a teljesítményt lényegesen nem befolyásoló kontextuális változó például, ha a valós világból való tudás alkalmazását kívánó tesztlap kiosztása előtt akár szóban, akár írásban, hosszabban vagy csak egy mondatban figyelmeztetjük a tanulókat, hogy a tesztlap tartalmazhat olyan feladatokat is, melyek megoldása nem rutinszerű, a valós világból való tapasztalatokat, vagy becslést igényel. A kísérleti eredmények azt mutatják, hogy ezek a figyelmeztetések hatástalanok voltak a diákoknak a teszten elért teljesítményére. (*Reusser és Stebler,* 1997; *Verschaffel, De Corte és Lasure*, 1994; *Verschaffel és De Corte*, 1997) Ezzel együtt a kontextus szerepe a problémamegoldás sikerességében nem kétséges. A kontextus lényeges megváltoztatásának tekinthető, ha például az egyén nem az iskolai környezetben találkozik a problémával, hanem az iskolán kívüli világban. Számos kutatási eredmény támasztja alá azt a nem meglepő tényt, hogy a gyermekek valóságos szituációban sokkal természetesebben, könnyedébben oldanak meg feladatokat, mint az iskolapadban. Gondolhatunk itt a játékgépek, a kártyajátékok, a számítógépes játékok világára, de ide tartozik a brazil cukorkaárus gyerekek esete (*Nunes, Carraher, Carraher és Schliemann,* 1985), akik az utcán a pénzt számolva természetes módon oldanak meg aritmetikai műveleteket.

Egy feladat tartalmi megjelenése konkrétan a feladat szövegére vonatkozó tulajdonság. A gondolkodás – de bármilyen más kognitív működés – tanítása sok esetben elvont tartalmi síkon történik annak reményében, hogy ezáltal a megtanult folyamatok nem kötődnek egy konkrét tartalomhoz, hanem könnyen transzferálható tudást eredményeznek, bár kevés bizonyíték van arra vonatkozólag, hogy ezek a programok hosszú távon valóban eredményesek lennének. (*Csapó*, 1996) Ezzel szemben köztudott, hogy a mély struktúrájukat tekintve izomorf feladatok közül azt tudjuk sikeresebben megoldani, amelyik familiárisabb témába van ágyazva. (*Eysenck és Keane*, 1997)

Példaként a „fordított kulcsszavas" szöveges feladatokat említem, melyek jellegzetessége a megszövegezésükben rejlik, de logikailag ez is a tartalom témakörébe sorolható. Fordított kulcsszavas feladatokon olyan problémákat értünk, melyekben a használandó műveletre vonatkozó kulcsszó, illetve a feladat által megkívánt művelet nem „egyirányú".

A Mamut Moziban a 'Gyűrűk ura – A király visszatér' című filmre egy jegy 1290 Ft-ba kerül. A Corvin mozi jegyáránál ez 200 Ft-tal több. Ha hárman megyünk a Corvinba, a hármunk jegye összesen mennyibe kerül?

A feladat megfogalmazásában a „több" kulcsszó szerepel, a feladat matematikára fordításakor mégis a „-" jelet kell alkalmazni. A fordított kulcsszavas feladatok terén történő kutatásokból az derül ki, hogy a diákok nagyobb valószínűséggel rontják el a fordított kulcsszavakkal leírt feladatokat, feltehetőleg azért, mert a kulcsszavakat és a számokat a szövegből kiragadó stratégiát alkalmaznak. (*Stern*, 1993; *Mayer és Hegarty,* 1998; *Kelemen,* 2004)

Realisztikus matematikai feladatok az iskolában

A „realisztikus" jelzőnek a matematikai szöveges feladatok világában nincs közösen elfogadott, jól definiált fogalma. Időről-időre felbukkan és újraértelmeződik az oktatás – azon belül a matematika oktatás – céljai között az életben használható tudás, az, hogy a diákok az iskola falai közül kikerülve kamatoztatni tudják az iskolában elsajátított ismereteket és képességeket. Ezzel párhuzamosan a realisztikus jelző is újra és újra előkerül, mindig kicsit másképp értelmezve a matematika-didaktika szaknyelvében.

Jelentése szerint a szó a legáltalánosabb értelemben arra utal, hogy a dolognak valamilyen értelemben köze van a valósághoz. Ez az értelmezés persze provokálja azt a kérdést, hogy mit értünk „valóság"-on. Kézenfekvő a valóságnak a filozófiai meghatározása helyett azt a hétköznapi megközelítését elfogadni, mely szerint a valóság az, amelyben élünk, és ennek alapján a valóságot leíró realisztikus matematikai feladatok az emberek mindennapi életében előforduló szituációkat írják le. De a gyerekek és a felnőttek világa nem azonos, tehát aszerint, hogy a gyermekek életében előfordulhat-e egy leírt szituáció, vagy sem, csoportosíthatjuk a realisztikusnak nevezett feladatokat. Ezen a ponton további kérdések merülhetnek fel: melyek a realisztikus feladatok? A diákok világából valók (Star Wars matricák eladása az osztálytársaknak), vagy azok, melyek olyan szituációkat írnak le, melyekkel majd az iskolából kikerülve, a felnőttek világában találkozhatnak (vásárlás a szupermarketben)? Egyes realisztikusnak nevezett matematikai problémák életszerű helyzetek, tevékenységek megtervezésére kérik a diákokat. Ilyen feladat például, hogy a szállítandó katonákat ossza be a rendelkezésre álló buszokba (*Carpenter*, *Lindquist, Matthews és Silver,* 1983), vagy rendeljen pizzát az osztálybulira. (*Kramarski*, *Mevarech és Lieberman,* 2001) Itt említendő a „Jasper-kalandok", ahol a diák feladata egy folyami hajóút megtervezése. (*Bransford, Zech és mtsai*, 1996) Szigorúan véve ezek a feladatok egy 8–14 éves gyermek számára nem realisztikusak, sőt irrealisztikusak, hiszen életében nem csinált ilyet, sem ehhez hasonlót. A környezetükben lévő felnőttek, szüleik életén keresztül, esetleg filmek révén találkozhattak hasonló szituációkkal. Használhatóságuknak lehet, hogy épp ez a titka: a felnőttek világa vonzó és érdekes. Minden olyan dolog – legyen az akár egy matematika feladat –, ami hozzásegíti a gyermeket ahhoz, hogy ha csak játékból is, de felnőttnek érezheti magát, az vonzó és izgalmas a számára. Ezen a gondolatmeneten eljuthatunk addig, hogy a világot az iskolával kapcsolatos és az iskolával nem kapcsolatos halmazokra osztva, realisztikus minden, ami az iskolán kívüli, és realisztikus minden olyan matematika feladat, mely az iskola világában nem megszokott. Ez esetben kérdéses, hogy lehet-e az iskolába tömegesen bevinni olyan feladatokat, melyek az iskolában nem megszokottak…

A fogalom sokféle, esetenként nem is pontosan tisztázott meghatározásaiból három jelentősebb értelmezést emelnék ki. A „realisztikus" jelző hosszú ideig az absztrakt ellentétét jelentette a matematika-oktatásban. Azaz minden szimbólumok helyett szavakkal leírt, szituációba ágyazott matematika feladat realisztikusnak számított. Ekkor született oly sok, ma már klasszikusnak számító szöveges feladat, melyek annyiban bizonyultak nehezebbnek a szimbólumokkal leírt megfelelőiknél, hogy a diákoknak a szövegből kellett kinyerniük az adatokat és a kulcsszavakat, majd megtalálniuk a helyes elvégzendő műveletet.

Második hullámként a már korábban említett, Hollandiából eredő „Realisztikus matematika" irányzat szerint „realisztikus"a feladat, ha a diákok számára elképzelhető, jelentéssel bíró. Az alkalmazott szöveges feladatok tehát konkrét, ismerős szituációba ágyazva kerültek a diákok elé.

A „realisztikus" jelző legújabb értelmezése szintén Hollandiában született, és *Verschaffel, De Corte* és *Lasure* 1994-es publikációja óta az érintett szakirodalomban azt jelenti, hogy bizonyos feladatok helyes megoldásához a diákoknak a valós, hétköznapi helyzetekben szerzett tapasztalataikat, ismereteiket feltétlenül aktivizálniuk kell. Tehát a „realisztikus" jelleg ezekben az esetekben a feladatnak nem a kontextusára, sem a tartalmára, hanem a megoldáshoz szükséges tudáselemre és annak alkalmazására vonatkozik. A továbbiakban én is ebben az értelemben használom a realisztikus szót.

A realisztikus szöveges problémák vizsgálatával kapcsolatban három úttörő szerepet betöltő, megkerülhetetlen tanulmány említendő: *Greer* (1993), Verschaffel és De Corte Lasure (1994), *Reusser* és *Stebler* (1997). Jelentőségük – a kutatási eredmények mellett – abban óriási, hogy meghatároztak egy olyan módszertani rendszert, mellyel az addig sok esetben anekdotikus megfigyelések helyett empirikus módon, nemzetközi szinten vizsgálhatóvá vált a diákok iskolai környezetben történő realisztikus probléma-megoldása.

Az eredmények – melyeket számos nemzetközi és hazai (*Csíkos*, 2003a; *Kelemen,* 2004) kutatások erősítenek meg – azt mutatják, hogy a realisztikus feladatokra – feladattól függően – a diákok maximum 20–50 százaléka ad realisztikus reakciót.

Verschaffel és De Corte és Lasure (1994), a Leuven egyetem (Belgium) kutatóinak tíz párból álló feladatsora ‚A realisztikus meggondolások szerepe az iskolai szöveges feladatok megoldásában' *(1)* címmel megjelent publikáció által vált híressé. A cikkben bemutatott kutatás célja az volt, hogy az addig oly sokszor emlegetett problémát, miszerint a diákok a szöveges feladatok megoldásakor mellőzik a valós világ szabályszerűségeit, tudományosan elfogadható vizsgálat alá vegyék és az addig sok esetben tudományos szempontból elégtelen és anekdotikus véleményeket empirikus bizonyítékokon nyugvó tényekkel váltsák fel.

E célból az említett belga kutatók egy 10 feladatpárból álló tesztet készítettek. A párok egy standard feladatból és egy „becsapós" vagy a valós világgal összevetést igénylő problémából álltak. A standard feladatok egy vagy esetenként több aritmetikai művelet egymás utáni alkalmazásával könnyen megoldhatók voltak, míg a párhuzamos feladatok megoldását kísérő matematikai modellezés problémákat rejtett, legalábbis annak, aki azokat a valós világgal kapcsolatos információkat, melyeket a feladatok szövege tartalmazott, komolyan számításba vette. Bonyolult kódolási rendszer alapján a párhuzamos problémákra adott realisztikus reakciókat mérték. A kutatás egyik legfőbb jelentősége e 20 feladatnak a nemzetközi szinten való publikálása, és egyben bevezetése a szakmai köztudatba. A megjelenése után számos országban került sor e 10 feladat-pár adaptációjából álló teszt használatára. A nemzetközi összehasonlításokat lehetővé tevő felmérésekben többek közt svájci, belga, ír, kanadai, japán és magyar gyerekek szerepeltek. Az említett szerzők híres 10 feladatpárjából az egyik álljon itt példaképpen:

> Standard feladat: Peti születésnapi bulit szervezett a tizedik születésnapja alkalmából. 8 fiú és 4 lány barátját hívta meg. Hány barátját hívta meg Peti a születésnapi bulijára?
>
> Párhuzamos feladat: Karcsinak 5 barátja van, Gyurinak pedig 6. Karcsi és Gyuri úgy döntöttek, hogy együtt rendeznek egy bulit. Meghívták valamennyi barátjukat, akik mind el is jöttek. Hány barát volt ott a partin?

A teszt magyar reprodukciójáról Csíkos Csaba számolt be (*Csíkos*, 2003), aki 2003-ban egy 260 tanulóból álló mintán használta a nemzetközileg elfogadott mérőeszköz magyar változatát. A hazai kutatási eredmények beleesnek a korábban elvégzett külföldi vizsgálatok által kijelölt intervallumba, ami számszerűen azt jelenti, hogy a tíz párhuzamos feladatra adott realisztikus válaszok átlaga 18,1 százalék, míg ugyanez az érték a Verschaffel és mtsai (1994) által vezetett kutatásban 16,3 százalék.

E nemzetközi kutatások együtt véve széleskörűnek és reprezentatívnak mondhatók, az eredmények pedig egybehangzóak ahhoz, hogy a tézist, miszerint a diákok között a matematikai szöveges feladatok megoldása közben erős a tendencia a realisztikus meggondolások, illetve a valós világgal kapcsolatos ismeretek figyelmen kívül hagyására, bizonyítottnak és elfogadottnak tekintsük.

Osztálytermi szabályok

A tétel empirikus adatokkal való bizonyítása után a későbbi kutatások – mint ahogy azt Verschaffel és mtsai (1994) előirányzott kutatási célkitűzésként meg is fogalmazták – a jelenség mélyén húzódó mozgatórugók, részletek feltárására összpontosítottak. A jelenség elemzésével foglalkozó „második kutatási generáció" egyik jelentős eleme a Reusser és Stebler (1997) által publikált, svájci szakemberek által végzett kutatássorozat. Céljuk a már megfigyelt és bizonyított, nem realisztikus meggondolások és a valós világ kizárására vonatkozó tanulói tendenciák mélyén húzódó előítéletek, meggyőződések megismerése, vagyis az osztálytermi környezetben történő problémamegoldás jellegzetességeinek, szabályainak feltérképezése volt. Reusser és Stebler (1997) kísérletsorozatának első kísérlete Verschaffel és mtsai (1994) a már klasszikusnak mondható 10 feladat-párjára épült, kiegészítve a tesztlap alján elhelyezett, a feladatok nehézségéről, megoldhatóságáról érdeklődő kérdéssorral. A kísérletet beszélgetés követte, melynek témája két kérdés körül mozgott. Az egyik, hogy vajon mi annak az oka, hogy a diákokban fel sem merült, hogy esetleg a feladatok nem megoldhatóak. A másik pedig: vajon hogyan történhet az, hogy – mint utóbb kiderült – sok diák észrevette a nehézségeket, mégsem foglalkozott velük. A diákok vélekedései közül néhány példa:

> „Azt gondoltam, hogy ez egy számolási feladat. Annak pedig mindenképpen kell, hogy legyen megoldása."
>
> „Soha nem futott még át az agyamon annak a gondolata, hogy megkérdőjelezzem egy feladat megoldhatóságát."
>
> „Mi ezelőtt soha nem oldottunk meg ilyen fajta feladatokat."
>
> „Észrevettem, hogy nem stimmel valami, de hát mégis csak meg kellett oldanom a feladatot. A matek könyvünkben nincsenek ilyen feladatok."

A gyerekek többsége a feladatmegoldáshoz használt stratégiát a tapasztalatára alapozva választja ki. Ha egy stratégia jól funkcionált már több alkalommal, akkor az nagy valószínűséggel most is jó lesz. (*Carr és Jessup,* 1995)

A kísérlet eredményeként a kutatók a valós világ kizárására vonatkozó tanulói tendenciák mélyén húzódó előítéleteket, meggyőződéseket – *Nagy József* (2000) kifejezésével: metakognitív attitűdöket – egy, általában nem tudatosan működő szabályrendszerben foglalták össze:

– ne kérdezd meg, hogy vajon korrekt-e egy feladat, vagy nincs-e adathiány;

– fogadjuk el, hogy minden problémának van „helyes" megoldása;

– használd fel a feladat minden számadatát az eredmény kiszámolásához;

– ha úgy tűnik, hogy egy probléma nem eléggé egyértelmű, vagy nem megoldható, keress valami nyilvánvaló értelmezést a feladat szövege nyomán, illetve a matematikai műveletekre vonatkozó tudásod felhasználásával;

– ha nem érted a problémát, keress kulcsszavakat, vagy korábban már megoldott feladatokat, hogy meghatározd, hogy milyen műveletet kell végezni.

Az ismert nemzetközi kutatások alapján egy további szabállyal egészíthetjük ki:

– ez egy matek órai matek feladat, amelynek a valósághoz nincs semmi köze.

A kutatócsoport további kísérletei is a Verschaffel és mtsai (1994) által kidolgozott feladatsoron alapszanak. Egy 439 fős mintán vizsgálták azt, hogy két fontos tényező, az iskola-típus és a feladat kitűzésének módja hogyan befolyásolja a realisztikus reakciók arányát.

E célból a kísérletben résztvevő osztályokat – és így az osztályokban tanuló diákokat – az iskolatípus szerint három csoportba sorolták: alapszint (Realschule), középhaladó (Secundarschule), haladó (Gymnasium).

A feladat-megoldási kontextust változtatva háromféle tesztet készítettek.

– teljes mértékben megegyező a Verschaffel és mtsai (1994) kutatók által használt eredeti feladatokat tartalmazó teszttel;

– a kutatássorozat első vizsgálatában szereplő mérőeszközöket alkalmazó teszt, azaz a feladatsor után pár kérdésben a példák minőségét (érthetőség, megoldhatóság) kellett a diákoknak értékelniük;

– vastag betűs figyelmeztetés állt a feladatsor előtt: „Légy figyelmes! Az alábbi feladatokból néhány nem is annyira könnyű, mint amilyennek látszik. Még az is előfordulhat, hogy bizonyos feladatoknak a megoldhatósága is kérdéses."

Az eredményeket vizsgálva az állapítható meg, hogy a realisztikus reakciók száma szignifikáns kapcsolatot mutat az iskolai szinttel, vagyis „elitebb" iskolába járó diákok várhatóan kevésbé zárják ki a valóság alkalmazását matematikai problémák megoldásánál, illetve kevésbé jellemző rájuk az a meggyőződés, miszerint minden matematikai feladatnak biztosan van megoldása. Ez a kapcsolat magyarázható a feltételezhetően magasabb általános értelmi képességekkel, a jobb szövegértéssel, pontosabb problémalátással, és esetleg azzal az öntudatos bátorsággal, ami így írható le: „én egy jó iskola okos diákja vagyok".

Ugyanez nem mondható el a feladatokat kísérő utasítások, kommentárok hatását mérő faktorról. Ez esetben egyáltalán nem mutatható ki kapcsolat a realisztikus reakciók számával. Azt mondhatjuk, hogy a matematikai feladatok megoldásakor a valóságban megismert dolgok figyelmen kívül hagyása olyan erős tendencia, amely ellenáll a tesztlapon szereplő bármiféle figyelemfelkeltő szöveg „súgó" hatásának. További kísérletekből kiderült, hogy a szóbeli figyelmeztetés sem eredményesebb. (*Verschaffel*, *Greer és De Corte*, 2000)

Reusser és Stebler (1997) kutatássorozatának utolsó kísérlete azt vizsgálta, hogy kimutatható-e kapcsolat a realisztikus reakciók és a diákoknak a megoldhatatlan vagy rosszul meghatározott, információ-hiányos feladatok terén szerzett tapasztalatai között. E tekintetben szignifikánsan pozitív és magas összefüggést találtak. Tehát azok a tanulók, akik osztálytermi környezetben már találkoztak nem megoldható vagy hiányos matematikai feladattal, nagy valószínűséggel jobban tudják alkalmazni a valós világ szabályait, és hangot adnak a feladatban rejlő problémáknak, a feladat megoldhatatlanságának.

A tapasztalatok a fejlesztés irányát abban jelölik meg, hogy ha a matematika oktatás meg akar felelni deklarált céljának, az életre való felkészítésnek, akkor annak szükséges és hatásos eszköze az, ha a matematika órán alkalmazott feladatok nem néhány típusból valók, hanem a feladatok struktúrája, tartalma és kontextusa szempontjából egyaránt széles palettáról kerülnek ki. Ennek megvalósításához elengedhetetlen, hogy az iskolai matematika oktatásban helyet kapjanak a valós világból kiemelt, esetenként rosszul, hiányosan meghatározott, vagy esetleg túl sok információt tartalmazó feladatok és megoldhatatlan problémák is.

Jegyzet

(1) Az eredeti angol cím: *Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problem.*

Irodalom

Ambrus András (2002): *Nemzetközi tendenciák a matematika oktatásában*. Háttértanulmány az OKI Értékelési és Érettségi Vizsgaközpont részére.

Ambrus András – Vancsó Ödön (1998): *Egy gyakorlatorientált matematikaoktatási modell a közoktatásban.* KOMA 1998.

Butterworth, G. (1993): Context and cognition in models of cognitive growth In: Light, P. és Butterworth, G. (szerk.): *Context and cognition.* Lawrence Erlbaum Associated, Publishers, Hillsdale – New Jersey – Hove – London.

Carpenter, T. P. – Lindquist, M. M. – Matthews, W. – Silver, E. A. (1983): Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher*, 76, 652–659.
Carr, M. – Jessup, D. L. (1995): Cognitive and metacognitive predictors of mathematics strategy use. *Learning and Individual Differences,* 3, 235–247.
Csapó Benő (1992): *Kognitív pedagógia.* Akadémiai Kiadó, Budapest.
Csapó Benő (1996): Improving thinking through the content of teaching In: Hammers, J. H. M. – Van Luit, J. E. H. – Csapó Benő (szerk.): *Teaching and learning thinking skills.* Swets és Zeitlinger, Lisse – Abindon – Exton – Tokyo.
Csapó Benő (2004): A tudás minősége. In: Csapó Benő: *Tudás és iskola.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
Csapó Benő (2003): *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése.* Akadémiai Kiadó, Budapest.
Csíkos Csaba (2002): Hány éves a kapitány? Matematikai szöveges feladatok megértése. *Iskolakultúra,* 12. 10–15.
Csíkos Csaba (2003): Egy hazai matematika felmérés eredményei nemzetközi összehasonlításban. *Iskolakultúra,* 8. 20–27.
Csíkos Csaba (2004): A metakogníció pedagógiai értelmezése. (megjelenés alatt) In: Tanulmányok a neveléstudomány köréből. Osiris, Budapest.
Csíkos Csaba – Dobi János (2001): Matematikai nevelés. In: Báthoty Zoltán – Falus Iván (szerk.): *Tanulmányok a neveléstudomány köréből 2001.* Osiris, Budapest.
De Corte, E. (2001): Az iskolai tanulás: A legfrissebb eredmények és a legfontosabb tennivalók. *Magyar Pedagógia,* 101. 413–434.
Dobi János (2002): Megtanult és megértett matematikai tudás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás.* Budapest, Vince Kiadó.
Eysenck, M. W. – Keane, M. T. (1997): *Kognitív pszichológia.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
Greer , B. (1993): The modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior,* 12. 239–250.
Kelemen Rita (2004): Egyes háttérváltozók szerepe „szokatlan” matematikai szöveges feladatok megoldásában. *Iskolakultúra,* 11. 28–38.
Kercood S. – Zentall S.,S. – Lee, D. L (2003): Focusing attention to deep structure in math problems: Effects on elementary education students with and without attentional deficits. *Learning and Individual Differences,* 14. 91–105.
Kintsch, W. – Greeno, J. G. (1985): Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92. 109–129.
Kramarski, B. – Mevarech, Z. R. – Lieberman, A. (2001): Effects of multilevel versus unilevel metacognitive training on mathematical reasoning. *The Journal of Educational Research*, 94, 292–300.
Mayer, R. E. és Hegarty, M. (1998): A matematikai problémák megértésének folyamata. In: Sternberg, R. J. – Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete.* Vince Kiadó, Budapest.
McNeal, B. – Simon, M. A. (2000): Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior,* 18. 475–509.
Nagy József (2000): *XXI. századi nevelés.* Osiris Kiadó, Budapest.
NAT (1995): *Nemzeti Alaptanterv.* Budapest, Korona Kiadó.
Nunes, T. – Carraher, T. – Carraher, D. W. – Schliemann, A. (1985): Mathematics int he streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology,* 76, 21–29.
Pólya György (1962): *Mathematical discovery.* Wiley, New York.
Reusser, K. – Stebler, R. (1997): Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction,* 7. 309–328.
Stern, E. (1993): What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology,* 1. 7–23.
Vári Péter (2003): *PISA-vizsgálat 2000*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
Verschaffel, L. – De Corte, E. (1997):Teaching mathematical modeling and problem-solving in the elementary school. A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics,* 28. 577–601.
Verschaffel, L., De Corte, E. és Lasure, S. (1994): Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic problems. *Learning and Instruction,* 4. 273–294.
Verschaffel, L. – Greer, B. – De Corte, E. (2000): *Making sense of word problems.* Swets & Zeitlinger B.V., Lisse.
Vidákovich Tibor – Csapó Benő (1998): A szövegesfeladat-megoldó készségek fejlődése. In: Varga Lajos (szerk.): Közoktatás-kutatás 1996/1997. Oktatási Minisztérium, Budapest. 247–273.
Wyndhamn, J. – Säljö, R. (1997): A szöveges feladatok és a matematikai megértés. *Iskolakultúra,* 12. 30–46.