

Az általános iskolai geometriatudás és a rajzkészség fejlődése

A geometria tanítása, ezen belül a geometriai transzformációk elsajátíttatása és a rajzkészség egyes komponenseinek fejlődése, fejlettsége között szoros összefüggés tapasztalható. A vizuális képességek közül elsősorban a térszemlélet céltudatos fejlesztése fontos feladat, hiszen a tanulók geometriatudását az elméleti ismeretek és a térbeli képességek egységében kell értelmeznünk és fejlesztenünk.

A geometriai gondolkodásmód fejlődése

Az általános iskolai geometria oktatás elsődleges feladata a geometriai szemléletmód, a képi gondolkodás, a sík- és térbeli tájékozódási képesség fejlesztése. (Hajdu, Kollerné és Novákné, 1998) A célkitűzés világos, sokatmondó, de a gyerekek életkori sajátosságainak figyelembe vételével a fejlődés, a fejlesztés folyamatát részben, konkrét lépéseiben tudjuk megragadni.

A geometriai gondolkodásmód fejlődésében P. H. van Hiele nyomán Rédling (1980) öt szintet különböztet meg. Az első szinten a geometriai alakzatokat egészként fogják fel a gyerekek. Az alakzat részeit nem különítik el, nem figyelnek az alakzat elemei és a különböző alakzatok közötti kapcsolatokra. A kisgyermekkori szemléletformálás első lépésfoka tehát a részek, az alakzatok tulajdonságainak céltudatos megfigyeltetése. A különböző pedagógiai, pszichológiai kutatások arra utalnak, hogy ez a folyamat nem spontán módon megy végbe. (Rédling, 1980) A szint működési folyamatait igazolni látszik a Gestalt-pszichológusok megközelítése, miszerint az alakfelismerés az inger általános alakján, s nem az összetevő tulajdonságjegyeken alapul. A kisgyermek korán meg tudja különböztetni például a négyzetet a téglalaptól, nevüket is gyorsan megtanulja, de geometriai tulajdonságaik megfigyeltetése, megismertetése hosszú évek fejlesztő munkája nyomán is gyakran csak részben sikerül. A geometria taníthatóságának feltétele, hogy a tanuló észre tudja venni az egészben a részeket.

A folyamat nyilvánvalóan bonyolultabb, mint ahogy azt Köhler és Wertheimer, az alaklélektan követői leírták. Sokkal közelebb vannak a valósághoz a kognitív pszichológusok által felvázolt mentális reprezentációk. Az utóbbi évtizedben két irányzat alakult ki: a szimbolikus megközelítés és a konnekciónizmus. A konnekciónista hálózatok a dolgokat elosztott módon reprezentálják, mint e hálózat aktivitásmintázatai. (Eysenck és Keane, 1997) Azt gondolom, hogy a hagyományos szimbolikus modellek és a konnekciónista hálózatok együttesen adhatják meg a választ a külvilág belső leképezéséről. Példánkhöz visszatérve a négyzet és téglalap képzete, mintegy „szimbóluma” – a hozzátartozó névvel, szóval együtt – már kisgyermekkorban jelen van. Az iskolai oktatás során (kisebb részben azon kívül) fokozatosan töltődik fel az elosztott hálózat a dolgról szerzett aktivitásmintázatokkal. A kérdés „csak” az, hogy ez a hálózat miért nem képes adott életkorban bármilyen mintázatot befogadni vagy esetleg miért nem képes aktiválni. Tény az, hogy meghatározott életkorban meghatározott tartalmakat meghatározott módszerekkel tudunk fejleszteni.

A második szinten kezdődik meg az alakzatok elemzése, a tanulók az alakzatok tulajdonságait manipulatív módon, eszközökkel állapítják meg. Nagy József (1985) szerint a tudásnak olyannak kell lennie, hogy az absztrakció valamennyi szintjének bejárását lehetővé tegye. Ezek a szintek a bejárhatóság eszközei szerint: manipulatív, képmási, verbális és szimbolikus. Az általános iskolások geometriai fogalmainak fejlesztése során ki kell emelni a manipulatív módszereket. Modellezések, mérések nélkül nem célozhatjuk meg se a méretlátás, se a térlátás képességének kialakítását. E módszerek nem kellően rendszeres alkalmazása, gyakran kihagyásuk és csak a képmás eszközhöz használata akadályozza a megfelelő képzet létrejöttét. Ezen a szinten a tanulók az alakzatokat saját tulajdonságaik hordozóiként vizsgálják, a különböző tulajdonságok közötti logikai kapcsolatot nem ismerik fel. (Rédling, 1980)

A harmadik szinten a tanulók képessé válnak az alakzatok tulajdonságainak logikai rendezésére. Megértik, hogy az egyik tulajdonság következhet a másiktól és hogy ezek a tulajdonságok nem függetlenek egymástól. Ezen a szinten, mely az általános iskola felső tagozatára jellemző, a logikai műveletek fejlettsége alapvetően meghatározhatja a geometriai gondolkodás fejlődési lehetőségeit, ugyanakkor a geometria szemléletes eszközeivel fejleszthetők a logikai műveletek. A szintek nem határolódnak el élesen egymástól, az áttérés fokozatos és elsősorban tartalom-specifikus. Az egyes szinteket más-más tartalmakon keresztül újra végig kell járnunk, legfeljebb a különböző életkorokban rövidebb idő szükséges a következő fokozatra való áttérésre.

A negyedik szinten már képesek a tanulók egy adott témakör rendszerezésére, például az egybevágósági transzformációk rendszerének áttekintésére. Az ötödik szinten az alakzatok konkrét megjelenési formáitól elvonatkoztatunk. Ez az axiomatikus szint felel meg a modern (Hilbert-féle) gondolkodási szintnek. Elsajátításának, elérésének ideje az egyetemre tehető. Ahhoz, hogy tanítványainknak egy része eljusson ideig, hosszú út vezet. Varga Tamás ezt így fogalmazta meg: „A matematika nagyon absztrakt, éppen ez az erőssége, hiszen ez azt jelenti, hogy nagyon sokféle konkrét jelenség közös lényegét sűríti magába. Ehhez a nagyon absztrakthoz nagyon konkrét kiindulással tudjuk a legsikeresebben elvezetni a gyerekeket úgy, hogy elegendő számú és elég változatos konkrét tapasztalatban részesítjük őket.” (idézi Klein, 1980, 45.)

A rajzkészség

A geometriai fogalmak, szerkesztések, transzformációk sikeres elsajátításához nélkülözhetetlen a rajzkészség – adott életkornak megfelelő – szintje, ugyanakkor a geometria tanításának fejlesztő hatása a rajzkészség fejlődésében is joggal elvárható. A geometria középpontjában a rajz, pontosabban az ábrázolás áll. Mégpedig többnyire a valóságtól elvonatkoztatott, absztrakt dolgok ábrázolása. A valóságban nincsen négyzet, csupán négyzet alakú vetülettel rendelkező tárgy, nincsen tükörtengely, csupán siktükör, melyben a valóság „megfordul”. A tükrözés problémája már érzékelteti azt a nehézséget, amellyel a tanulóknak a mozgások ábrázolásánál kell szembenézniük. A térbeli mozgások absztrahálásával, sikra való levetítésével tudják a feladatokat megoldani. Ahhoz, hogy megért-sük a folyamatot, ismernünk kell a rajzkészség összetevőit.

A rajzkészség egy komplex rendszer, mely több különböző pszichikus funkció koordinációja. (Csapó és Varsányi, 1985) Működésében alapvető szerepet játszanak az információ-feldolgozás elemi folyamatai: az érzékelés-észlelés, az alakzatfelismerés, a figyelem, a memória, melyek aktuális fejlettségéről és fejlesztésük különböző lehetőségeiről nem szabad megfeledkezniük. Csapó és Varsányi (1985) munkája nyomán ismerjük, hogy a készség speciális részeként jelennek meg a pszichomotoros összetevők: az elemi szenzoros és motoros készségek, a mozgáskoordináció (vonalhúzás) és a „szem-kéz” koordináció (ábrázolás); a térszemlélet komponenseként értelmezzük a forma- és alak-kon-

stancia érzékelését síkon és térben és a transzformációkat. Végül nem hagyhatjuk figyelmen kívül az esztétikai komponenseket – pontosság, hibátlanság, egyértelműség – és számos kultúrafüggő összetevőt.

Általában a vizuális feladatok megoldásában kiemelt szerepe van a térrel kapcsolatos képességeknek, így a térbeli tájékozódásnak, a téri konstruálásnak és a térelképzelésnek. (Kárpáti és Gyebnár, 1996a) E komplex funkciókból néhány „egyszerűbb” képességet – a Leonardo Program részeként – Kárpáti Andrea és Gyebnár Viktória vizsgált: a szemérték pontosságát, a háromdimenziós térelképzelést, és a kombinatív illesztési térelképzelés fejlettségét. A kísérleti program eredményeként megállapították, hogy a térszemlélet csak nagyon kis mértékben, sőt egyes életkorokban egyáltalán nem fejleszthető. A tanulók rosszul szerepeltek a téri feladatok megoldása során, valószínűleg azért, mert a hagyományos feladatok a teret mechanikusan, adott szabályok szerint ábrázoltatják, melyek már távol állnak a megélt téri élménytől. A kísérlet igazolta, hogy amennyiben a gyerekek konkrét téri élményeiket gyarapíthatják makettezéssel, gyurmázással, konstruálással, építéssel, egyértelműen fejlődik téri látásmódjuk és térábrázolásbeli jártasságuk is. (Kárpáti és Gyebnár, 1996b) Az utóbbi évtizedben lezajló tantervi változások sora, a technika és rajzórák csökkenése valószínűleg nem arra ösztönzi a pedagógusok többségét, hogy tárgykészítésre, a térbeli képességek tudatos fejlesztésére figyeljen. Minden képesség, így a térszemlélet is fejleszthető a megfelelő életkorban, a megfelelő tanítási stratégiával. A képességek komplex rendszerek, fejlődésük a tanuló személyiségében idéző elő változást. A térbeli képességek és általában a rajzkészség fejlesztése komplex módon a rajzórák, az írás és technika órák, a matematika és környezetismeret órák feladata, nem egymástól függetlenül, hanem egymással összefogva, hiszen e képességegyüttes nélkül nem lesz hatékony geometriaoktatásunk sem.

Az empirikus vizsgálat

A vizsgálat céljai, hipotézisei

A vizsgálat egyik célja az egybevágóság-fogalom fejlődési tendenciáinak, az egybevágósági transzformációk témaköréhez kapcsolódó ismeretek fejlettségének elemzése az 5., 7. és 8. évfolyamokon. A másik cél a tanulók rajzkészségének fejlődése és a geometriai ismereteik gyarapodása közötti összefüggés vizsgálata. Feltehetően a tanulók az életkor előrehaladtával egyre több és mélyebb geometriai ismerettel rendelkeznek, ezért az adott évfolyamon elvárt követelményeknek megfelelő eredményeket érnek el a teszteken. A tesztek közös feladatainak megoldásában a magasabb évfolyamokon javuló eredmények tapasztalhatók. További hipotézisként fogalmazódott meg, hogy a rajzkészség folyamatosan fejlődik, az általános iskola felső tagozatán mért eredmények követik a korábbi mérések alapján kimutatható tendenciákat, valamint a matematika teszteken nyújtott teljesítmények és a rajzkészség fejlettsége között összefüggés van.

A mérőeszközök

A matematika tesztek a geometriai transzformációkkal, az egybevágóság fogalmának kialakításával kapcsolatos tantervi követelmények teljes lefedésének szándékával készültek az ötödik, hetedik és nyolcadik osztályosok számára. A mérőeszközök összeállításának fő szempontja az volt, hogy a tantervi követelmények körén túl alkalmasak legyenek a vizsgálandó fogalom fejlődésének elemzésére is, melyet a három teszt közös feladatai, itemei tettek megfigyelhetővé. (Freiné, 2002)

A rajzkészség két komponensének, a pszichomotoros összetevők és a térszemlélet fejlettségének mérésére Csapó és Varsányi (1985) kidolgozott tesztjeit néhány változtatással használtam fel. A „Pszichomotoros komponensek” teszt 5. feladatában az eredeti kétoldalt helyett egy egyenesre kell merőlegest rajzolni a tanulóknak. Ezt az elemet az eredeti

teszt elemzése során a szerző problémásnak látta, kiemelésre javasolta. A „Térszemlélet” teszt 3. feladatában a kétirányú nyújtást az általános iskolai korosztály számára könnyebbé, egyirányú nyújtássá alakítottam.

A minta és a mérés

A vizsgálatban egy Bács-Kiskun megyei község tanulói, a hartai német nemzetiségi általános iskolások vettek részt. Az 5. évfolyamon két párhuzamos osztályban 50 tanuló, a 7. évfolyamon szintén két osztályban 44 tanuló írta meg a tesztek, a 8. osztályosok négy párhuzamos osztályának létszáma 65 volt. Az iskola hagyományos német nemzetiségi nyelvoktatása mellett már az 1. évfolyamon képességek szerint besorolt osztályokban indul a kétnyelvű oktatás, így a vizsgálatban évfolyamonként egy kétnyelvű osztály teljesítményét hasonlíthattuk össze a hagyományos nyelvoktatásban résztvevő tanulócsoporthoz. Az alacsony minta elemszám miatt nem készült a tesztek több változat. Az évfolyamok közös feladatai miatt fontos volt a matematika tesztek egy tanítási napon belüli megírása, a magasabb létszámú osztályok esetében csoportbontással, melyre 2001 decemberében, a rajzkészség tesztek megírására 2002 januárjában került sor.

Eredmények

A vizsgált geometriai fogalmak fejlődése

A három évfolyamra készült tudásszintmérő tesztek reliabilitás mutatói az 5. évfolyamon 0,81, a hetedikes 0,91, a nyolcadikos teszté 0,85. A tesztek megbízhatósága megfelelő. Az 5. osztályos feladatlap kisebb reliabilitás értéke magyarázható a viszonylag alacsony itemszámmal (31), utalhat a mért terület kevésbé mély elsajátítási szintjére. A tudásszintmérő teszt átlagteljesítménye az ötödikes évfolyamon 52 százalék, relatív szórása 17, a hetedikeseké 65 százalék, 21 százalékos szórás mellett, a nyolcadik évfolyamon 60 százalék, relatív szórása viszont csak 14. A tesztek az egyre bővülő és mélyülő követelmények mérésére készültek, így a kapott átlagértékek alapján megállapítható, hogy a tanulók geometria-tudása a felső tagozat tanéveiben folyamatosan gyarapodik.

A tesztek 4 közös feladatot, összesen 16 közös itemet tartalmaztak. A három évfolyam közös feladatainak átlagteljesítményei az ötödikes évfolyamon 55 százalék, relatív szórása 20, a hetedikeseké 74 százalék, 21 százalékos szórás mellett, a nyolcadik évfolyamon 78 százalék, relatív szórása viszont csak 13. A kapott átlagértékek a hetedik osztályban ugrásszerű fejlődést mutatnak, a nyolcadikosok kisebb teljesítménynövekedése mellett a szórás csökkenése figyelhető meg. A három évfolyamot varianciaanalízissel összehasonlítva szignifikáns különbséget kaptunk az 5. és 7., illetve az 5. és 8. osztály között ($F=25,73$, $p<0,01$). Miközben a nyolcadikos átlagteljesítmények a hetedikesekéhez viszonyítva alig növekedtek, az eloszlások változásában, szűkülésében és jobbra tolódásában megragadhatjuk a fejlődést, amely itt a fogalmak stabilitását, a transzformációk biztonságos végrehajtását jelenti. (Freiné, 2002)

A magteszt feladatelemeinek részletes elemzése a geometriatudás több érdekes változására hívta fel a figyelmet. A hasonló és egybevágó síkidomok azonosításában az általános iskola felső tagozatán nem beszélhetünk fejlődésről, a tengelyesen tükrös alakzatok felismerésében, tükrötengelyeik berajzolásában az ötödik és a két magasabb évfolyam között szignifikáns különbség van ($F=33,10$, $p<0,01$). Az alakzattal nem párhuzamos tengelyre való tükrözés hibátlan végrehajtásában, és a téglatest valamennyi helyes testhálójának kiválasztásában szignifikánsan szintén az ötödikes évfolyam tér el a másiktól ($F=13,29$, $p<0,01$).

A közös teszt rész egyes itemeinek kapcsolódásainak szorosságát, a kapcsolatok évfolyamonkénti átrendeződésének tendenciáit elemezve a fogalomfejlődés egy másik aspektusát vizsgálhatjuk. Az ötödikes itemeredmények klaszteranalízise során kapott dendrog-

ram legszembevetőbb sajátossága, hogy az egybevágó alakzatok felismerését és a hasonló síkidomok azonosítását mérő itemek távoli klasztert alkotnak. A tengelyes tükrözés végrehajtását az alakzattal párhuzamos tükrötengelyre kéro itemek klaszterei teljesen függetlenül jelennek meg a dendrogram végén.

A hetedikes klaszterek határozott változása a tengelyes tükrözést mérő feladat elemek összekapcsolódása. Ezen az évfolyamon már nem függ a tükrötengely elhelyezésétől, a nézőponttól a transzformáció végrehajtása. A tengelyesen szimmetrikus alakzatok felismerése az egybevágó síkidomok azonosításának feladatelemeivel kapcsolódik össze. A testhálók kiválasztásának egyszerűbb esetei valamennyi előző klaszterhez illeszkednek, ugyanakkor a téglalap és a négyzet tükrötengelyeinek berajzolása különálló klasztert alkot, és csak az utolsó lépésben zárja le a struktúrát. Ennek hátterében a fogalomfejlődés problémáját érzem, hiszen előfordul, hogy a tanuló csupán megtanult ismeretként, emlékezetből rajzolja be a tükrötengelyeket, miközben a témakör többi elemei nem fejlődtek megfelelően. Nem kialakított, hanem „megtanított” fogalomról lehet szó. A nyolcadikos eredmények alapján kapott dendrogram a struktúra valamelyes átrendeződését figyelhetjük meg. A hetedikesekétől eltérően nem kettő, hanem három feladatcsoport szerveződött. A megfelelő testhálók kiválasztásának itemei egységesen, de a többitől elkülönülten jelennek meg. (Freiné, 2002)

A „Pszichomotoros komponensek” teszt eredményei

A pszichomotoros összetevők mérésére szolgáló, Csapó és Varsányi (1985) által kidolgozott teszt egy feladatelem változtatásával, ezzel az eredetinel kicsit könnyebb formában került a tanulókkal megíratásra. Ez a változtatás is hozzájárulhatott ahhoz, hogy a nyolcadikosok részmintáján a teszt nagyon megbízhatatlanul mért ($\alpha=0,39$), hiszen a középiskolások mérésénél is kiderült, hogy a feladatok jó része túl könnyű a nagyobbak számára, kicsi a szórás, ezért nem kaptunk jó reliabilitás mutatót. Az ötödik évfolyamon 0,73, a hetedik évfolyamon kapott 0,70 reliabilitás értékek megfelelőnek tekinthetők.

A három évfolyam átlagait varianciaanalízissel összehasonlítva szignifikáns különbségeket kaptunk ($F=46,07$, $p<0,01$). A pszichomotoros összetevők az általános iskola felső tagozatán folyamatosan fejlődnek, az átlagteljesítmények nőnek, a szórások csökkennek. Eredményeink jól illeszkednek az 1984-es mérés tendenciáihoz, a hetedik és nyolcadik évfolyamon most valamelyest magasabb átlagokat kaptunk a közel húsz évvel ezelőtti 16 éves korosztályénál. A feladatonkénti átlagok és szórások elemzése során (1. táblázat) részletesebb képet kapunk a készség fejlődéséről.

1. táblázat. A „Pszichomotoros komponensek” teszt feladatainak átlagteljesítményei és relatív szórásai az ötödik, hetedik és nyolcadik évfolyamon (%)

Feladat	5. évfolyam		7. évfolyam		8. évfolyam	
	átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás
vonalkövetés	83	23	92	14	97	8
utánrajzolás	44	27	67	25	79	16
nagyítás-kicsinyítés	28	25	30	24	30	27
távolságtartás	30	26	49	25	49	23
iránytartás	13	27	40	41	59	35
teljes teszt	41	15	58	15	65	10

Az 1. feladat követéses vonalvezetése már az 5. évfolyamon is magas értékről indul, 7. és 8. osztályban meghaladja a 90 százalékos átlagteljesítményt, a szórások csökkenése mellett. Az utánrajzolást (háromszög, négyzet, kör, görbe vonal) mérő 2. feladat eredményei egyenletes fejlődést mutatnak a három vizsgált évfolyamon. A 3. feladat alacsony

átlagai azt tükrözik, hogy nyolcadik osztályig a kör nagyításában, illetve kicsinyítésében nem történik előrelépés. A 4. feladat megadott távolságtartás mellett pontok elhelyezését kérte, különbséget az ötödik és hetedik évfolyam között figyelhetünk meg. Az 5. feladatban a megadottakkal párhuzamos, illetve merőleges egyenesek rajzolása volt a feladat, melyben az ötödikesek nagyon alacsony átlagai után a másik két évfolyamon ugrásszerű javulást tapasztaltunk. A varianciaanalízis értékei alapján megállapíthatjuk, hogy az 1. és 4. feladat esetén csak az ötödik és hetedik évfolyam között van szignifikáns különbség ($F=10,58$, $F=10,61$, $p<0,01$). A 2. és 5. feladat átlagainak összehasonlítása mindhárom évfolyam között szignifikáns különbséget kaptunk ($F=33,41$, $F=24,94$, $p<0,01$).

A térszemlélet fejlődési tendenciái

A térszemlélet komponenseit mérő teszt vizsgálatunkban kapott átlagteljesítményeit, relatív szórásait a 2. táblázatban foglaltam össze. A teszt mintáinkra jellemző megbízhatósági értékei az egyes évfolyamokon sorban: 0,77; 0,73; 0,61 (Cronbach- α). Korábbi ismert mérés a teszttel csak a középiskola második évfolyamán készült (Csapó és Varsányi, 1985), melynek eredményeit felhasználva próbálom a mért készség fejlődési tendenciáit feltárni. A 2. táblázatban az 1984-es értékeket a 10. évfolyam jelöléssel és dőlt betűvel tüntettem fel.

2. táblázat. A „Térszemlélet” teszt feladatainak átlagteljesítményei és relatív szórásai az ötödik, hetedik, nyolcadik és tizedik évfolyamon (%) (Az 1984-es mérés eredményeit a 10. évfolyam megnevezéssel és dőlt betűvel tartalmazza a táblázat)

Feladat	5. évfolyam		7. évfolyam		8. évfolyam		10. évfolyam	
	átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás
vetületek	8	23	29	38	18	33	93,9	20,1
vizuális memória	29	26	49	24	45	24	56,7	34,6
nyújtás (egyirányú)	13	15	19	24	23	22	43,9	63,1
tükrözés	68	35	77	35	79	33	97,3	13,8
teljes teszt	25	17	38	18	37	16	63,0	24,0

A teszt megbízhatóan mér az ötödik és hetedik évfolyamon, de a nyolcadikosok mintáján itt sem lehetünk elégedettek a reliabilitás-mutatóval. Az ötödikes átlagteljesítmény a vizsgált készség minimális szintjéről árulkodik. A hetedikesek már szignifikánsan jobban teljesítettek, a nyolcadikos mintán nem szignifikáns visszaesést tapasztalhatunk ($F=9,21$, $p<0,01$). Összességében az általános iskolai eredmények messze alulmaradnak a 18 évvel ezelőtti 16 éves korosztály teljesítményétől. Természetesen az általános iskolai minta nagysága miatt messzemenő következtetéseket ebből még nem vonhatunk le.

A feladatok elemzése során szignifikáns különbséget csak az ötödik és hetedik osztályos feladat, illetve item átlagai között találtam. Az 1. feladat három, különböző nézőpontú vetület megrajzolását méri, az átlagértékből is látható, hogy a növekedés szignifikáns ($F=5,19$, $p<0,01$). Érdekes azonban, hogy a három feladatelem közül csak az egyik oldalnézet vetületének megoldottsága javult szignifikánsan ($F=6,21$, $p<0,01$).

A 2. feladat ötödikes és hetedikes átlagpontoszámai között van még szignifikáns különbség ($F=8,10$, $p<0,01$). A feladat legnehezebb eleme egy alakzat kontúrjának emlékezet alapján történő megrajzolása, melyet ugyanolyan alacsony szinten oldottak meg mindhárom évfolyamon, sőt a középiskolások is csak 38 százalékos teljesítményt értek el. A szerkezet reprodukálását mérő feladatelemek már szignifikáns különbséget mutatnak az ötödik és hetedik évfolyam között ($F=6,62$, $F=5,04$, $p<0,01$), sőt a fejlődés a nyolcadik és tizedik osztály között is jelentős.

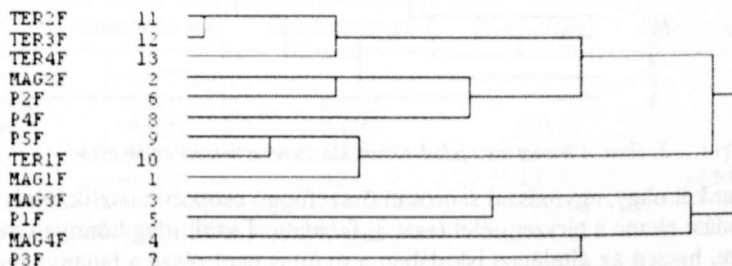
A 3. feladatban elért átlagteljesítmények önmagukért beszélnek. Úgy tűnik, hogy a hasonlósági transzformációk részletes tanítása, tanulása nélkül a témához kapcsolódó feladatokat az általános iskolai tanulók nem tudják jó eredménnyel megoldani. A 4. feladat semmilyen szignifikáns különbséget nem mutat, kivéve a korábbi középiskolai eredményeket, ahol ebben közel 100 százalékra teljesítettek. Már ötödik osztályban elég magas átlagot, 68 százalékot kaptunk, de igen meglepő, hogy a tengelyes tükrözéshez kapcsolható feladat megoldása annak ellenére sem fejlődik, hogy a következő két évben igen intenzív a geometriai transzformációk tanítása. Gondolhatunk arra, hogy a tengelyes tükrözés végrehajtása nem független a feladat ismertségétől, a készség fejlettsége függ a transzformálandó alakzat összetettségétől is. E feladat kapcsán általános iskolai geometria oktatásunk szemléletbeli problémái is felszínre kerülhetnek, hiszen látjuk, hogy tanítási stratégiáink nem ennek, a számunkra alapvetőnek hitt feladatnak a megoldásához vezetnek.

A tudásszint és a rajzkészség összefüggései

A tesztek közös feladatstruktúrái

A klaszteranalízis módszere lehetőséget ad számunkra, hogy a három felvett teszt feladatainak összekapcsolódását, és ezzel belső összefüggésrendszerüket elénk tárja. Az összefüggések vizsgálatába csak az ötödik és hetedik osztályos eredményeket vontam be, mert a nyolcadikos mintán a tesztek, elsősorban a készség-tesztek megbízhatósága nem megfelelő. A tudásszint mérő teszteken nyújtott teljesítmények összehasonlítására, a fejlődés tendenciáinak megfigyelésére a közös tesztrész négy feladata került az elemzésbe.

Az ötödik évfolyam által megírt három teszt összesen 13 feladatának rendszerét a 1. ábrán elemezhetjük. Az ábrán a térszemlélet teszt feladatait TER, a pszichomotoros teszt feladatait P, a tudásszintmérő tesztek közös részét, a magteszt feladatait MAG rövidítéssel jelöltem. A struktúra két, egymástól lényegében független osztályra ($r=0,15$), az első osztály újabb kettő, nagyon laza kapcsolatban álló csoportra különül el. A feladatrendszerre összességében az alacsony korrelációk jellemzők. Mindhárom csoportban elsősorban a pszichomotoros komponensek mutatnak szorosabb kapcsolatot a magteszt feladataival. A térszemlélet teszt három feladata egységes rendszert alkot.



1. ábra. A három teszt feladatainak klaszterei az ötödik évfolyamon

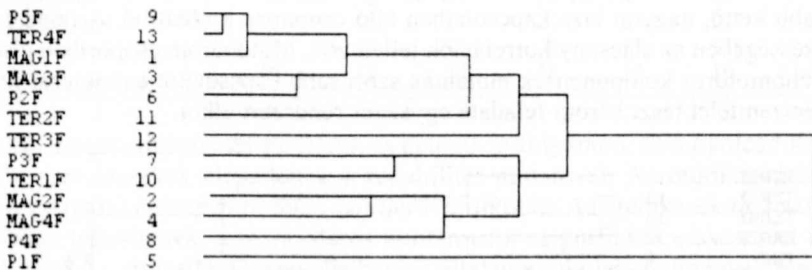
Legszorosabb összefüggést a térszemlélet teszt 2. és 3. feladata között találunk, azonban tudnunk kell, hogy az ötödikesek nagyon alacsony teljesítményt értek el ezekben. A megoldást a vonalhúzás készségének kialakultsága befolyásolja, amit a hozzájuk tartozó térszemlélet teszt negyedik, a magteszt és a pszichomotoros teszt 2. feladata támaszt alá. Ez utóbbiak a tengelyesen tükrös alakzatok különböző szempontú megjelenítéséhez kapcsolhatók. Minél összetettebb az ábrázolandó alakzat szerkezete, annál szorosabb a kapcsolata a térszemlélet teszt 2. és 3. feladatával, melyek közös jellemzőjeként a helyes szerkezet reprodukálást emelhetjük ki, és éppen ennek hiánya okozza a gyenge eredmé-

nyeket. A csoporthoz lazábban kapcsolódó P4-es feladatban megadott pontok elhelyezéséhez ugyancsak szükség van valamilyen mértékű szerkezeti feltárára is.

A következő csoportot a három teszt egy-egy feladata alkotja. A pszichomotoros teszt 5. feladata egyenesek rajzolását kéri az eredetiekkel azonos (párhuzamos), illetve azokra merőleges irányban. Az iránytartás fejlettsége befolyásolhatja a térszemlélet teszt 1. feladatának megfelelő nézőpontú vetületének megrajzolását. Emlékeztetőül: mindkettőnél rendkívül alacsony átlagteljesítményt kaptunk. Nehezen magyarázható a magteszt 1. feladatának kapcsolódása az előzőekhez. A hasonló és az egybevágó síkidomok azonosításához szükséges valamennyi tulajdonság ismeretének hiánya, ezeken belül az arány-, illetve szögtartás lehet az összekötő kapocs. A két csoport egy klaszterre szerveződése a két alapvető komponens, a vonalhúzás és iránytartás összetartozását, a viszonylag gyenge kapcsolat pedig a rajzkészség egyes elemeinek fejlettségét, az aktuális iskolai tudásra gyakorolt hatásának érvényesülését mutatják.

A másik nagy osztály a magteszt és a pszichomotoros teszt két-két feladatát tartalmazza. A MAG3 és a P1 feladatok összekapcsolódása a tengelyes tükrözés végrehajtásában szerepet játszó vonalkövetést mutatja. A MAG4 és a P3 feladatokban a megfelelő testhálók kiválasztása és a kör nagyítása, kicsinyítése között egy transzformációs szemléletbeli hiányt tételezhetünk fel. Érdekes, hogy a magteszt ötödikes klaszteranalízise során is a 4. feladat itemei a hasonló alakzatok felismeréséhez kapcsolódtak. Lényegében ezt a klasztert a transzformáció kifejezéssel jellemezhetjük, melynek legfontosabb sajátága ezen az évfolyamon, hogy működését a vonalkövetés fejlettségi szintje határozza meg.

A hetedik évfolyam eredményei alapján kapott dendrogram az előzőnél sokkal egységesebb, összefüggőbb feladatrendszert tár elénk. (2. ábra) Egyedül a pszichomotoros teszt 1. feladata független a rendszertől ($r=-0,04$). A vonalkövetésben mutatott teljesítmény ezen az évfolyamon már 90 százalék feletti, a feladatok megoldásában más összetevők játszanak nagyobb szerepet.



2. ábra. A három teszt feladatainak klaszterei a hetedik évfolyamon

A rendszer két nagy, egymással szorosan összefüggő csoportra oszlik, melynek középső kapcsolódási eleme a térszemlélet teszt 3. feladata. Tartalmilag könnyen magyarázható a helyzete, hiszen az általános iskolában a nyújtás nem része a tananyagnak, de mint a transzformációk egyik formája a struktúra részét képezi. A térszemlélet teszt feladatai ezen az évfolyamon már nem alkotnak egységes rendszert, mindhárom teszt feladatai részt vesznek egy-egy nagyobb klaszter szerveződésében, megfigyelhető a pszichomotoros komponensek meghatározó szerepének csökkenése.

A legszorosabb kapcsolat a pszichomotoros teszt 5. és a térszemlélet teszt 4. feladata között van, melyekkel a magteszt 1. feladata függ össze. Tartalmukat tekintve a köztük lévő kapcsolat talán így foglалható össze: ha a tanuló képes megfelelő iránytartással egyeneseket rajzolni, akkor képes összetett szerkezet tükröképének ábrázolására és ekkor lényegében rendelkezik mindazon ismerettel ahhoz, hogy el tudja dönteni alakzatok egybevágóságát.

A magteszt 3. és a pszichomotoros teszt 2. feladatának összekapcsolódása jelzi, hogy a vonalkövetés (P1) helyett a vonalhúzás jelentősége nőtt meg az egyszerű alakzatok tengelyes tükrözésének végrehajtásában, vagy megfordítva azt is mondhatjuk, hogy a transzformáció pontos elvégzése segíti az alakzatok méretének, szakaszainak és szögeinek megbecsülését, így az eredetivel egybevágó síkidomok megrajzolását. Az első klasztercsoportot a térszemlélet teszt 2. feladata zárja, melyet ezen az évfolyamon a vizuális memória megfelelő működésének szükségessége kapcsolhat a többi feladathoz, ugyanakkor a szerkezet feltárásának helyessége és reprodukálási képessége is fontos összetevő, csakisúgy, mint az ötödikesekek esetében.

Nehezen interpretálható a kör nagyítása, kicsinyítése (P3) és a csonkolt test vetületeinek berajzolása (T1) közötti kapcsolat. Talán azoknak a tanulóknak sikeresebb a (még nem tanult) hasonlósági transzformáció becsléssel történő végrehajtása, akiknek a térbeli tájékozódó képessége fejlettebb. Ugyancsak érdekes a tengelyesen tükrös síkidomok azonosítása, a tükrötengelyek berajzolása (MAG2) és az egybevágó testhálók kiválasztása (MAG4) közti összefüggés. A hozzájuk kapcsolódó P4-es feladatban a pontok elhelyezésének sikere nemcsak a koordináták helyes meghatározásában rejlik, hanem az ötödikes elemzéshez hasonlóan a szerkezet egységes értelmezése, az egész és részei közötti viszony érzékelése lehet e feladatok közös jellemzője.

Az iskolai tudás és a háttérváltozók összefüggései

Az iskolai tudáson a tanulók matematika teszten elért teljesítményeit és a két képességteszt alapján kimutatható készségek fejlettségét értem. Nyilvánvaló tény, hogy az iskolai oktatás tantervi követelményeinek teljesítése nem csak a közvetlen tantárgyi tudásban jelentkezik, hanem a mért területhez kapcsolódó készségek és képességek fejlődésében is megmutatkozik. A vizsgált területen mért teljesítményeket összehasonlítottam a tanulók iskolai osztályzatával, pontosabban az előző tanév matematika jegyeivel, a tanulók nemével és a kétféle (nyelvoktató, kétnyelvű) oktatási forma, osztálytípus szerepével. Az ötödik évfolyamon kapott korrelációs együtthatókat a 3. táblázat tartalmazza, a hetedik évfolyam összefüggéseit a 4. táblázatban figyelhetjük meg.

3. táblázat. A tudásszintmérő teszt, a képességtesztek és a háttérváltozók közötti korrelációs együtthatók az ötödik évfolyamon

Korrelációk	Matematika teszt	„Pszichomotoros” t.	Térszemlélet t.	Matematikajegy	Nem
Pszichomotoros teszt	0,64**				
Térszemlélet teszt	0,52**	0,51**			
Matematika jegy	0,65**	0,48**	0,44**		
Nem	-0,19	0,23	-0,04	0,11	
Osztálytípus	-0,48**	-0,25	-0,32*	-0,59**	-0,19

** p<0,01; * p<0,05 szinten szignifikáns korrelációs együttható

Az ötödikesekek matematika teszten nyújtott teljesítménye a matematika jegyekkel mutatja a legszorosabb összefüggést, és csaknem ilyen magas korrelációs értéket kaptunk a pszichomotoros komponenseket mérő teszt eredményeivel. A térszemlélet fejlettségével valamivel alacsonyabb, de ugyancsak szignifikáns összefüggést tapasztalhatunk. A teljesítményeket nem befolyásolja a tanulók neme, szignifikáns együtthatókat nem kaptunk, a negatív korrelációk a matematika és térszemlélet teszt esetén a fiúk kicsiny előnyét jelzi (őket jelöltük 1-es számmal).

Az osztálytípusra vonatkozó összefüggések a legerőteljesebben a matematika jegyben és a matematika teszten elért teljesítményben jelentkeznek. A negatív szignifikáns korrelációk azt mutatják, hogy a „kétnyelvű” osztályba járó tanulók (őket jelöltük 1-es szám-

mal) jobban teljesítenek a teszten, és jobb osztályzatokat is kapnak, mint a másik osztály-típusban tanulók. Ugyanakkor a készségteszteken nyújtott teljesítményekben nem mutat-ható ki különbség a két csoport között. Az első osztályos gyerekeket képességeik szerint sorolták be a kétféle nyelvoktatási formába, az eredmények mégis azt jelzik, hogy képes-ségfejlődésben nem követik azt az ütemet, amelyet a tantárgyi, tanulmányi eredményeik alapján várnánk. A készségtesztek és a matematika jegy közötti együttható értéke nem túl magas, de szignifikáns összefüggést tükröz, valamint a két készségteszten nyújtott telje-sítmény között is ($r=0,51$, $p<0,01$) közepes erősségű kapcsolat van.

A hetedik-es korrelációs mátrixot (4. táblázat) vizsgálva az előzőekhez hasonló tenden-ciát figyelhetünk meg. Általában azonban magasabbak az együtthatók. A hetedik-esek matematika teszten nyújtott teljesítménye sokkal inkább meghatározza a matematika je-gyüket, mint azt az ötödik-eseknél tapasztalhattuk. Hozzá kell azonban tennünk, hogy a geometria témakörök jelentősége, súlya a matematika tantárgyon belül a hatodik és he-tedik évfolyamon jelentősen megnő. Különösen érdekes, hogy a „Térszemlélet teszt” és a matematika jegy közötti összefüggés erősödni látszik, mintegy igazolva azt, hogy a geometriai transzformációkhoz kapcsolódó követelmények megfelelő szintű elérése nem nélkülözheti a térszemlélet adott életkorban elvárt fejlettségét. A nyelvoktatás intenzívi-tása szerinti két osztálytípus az életkor előrehaladtával egyre kevésbé határozza meg a matematika teljesítményt és a matematika jegyeket.

4. táblázat. A tudásszintmérő teszt, a képességtesztek és a háttérváltozók közötti korrelációs együtthatók a hetedik évfolyamon

Korrelációk	Matematika teszt	„Psichomotoros” t.	Térszemlélet t.	Matematikajegy	Nem
Pszichomotoros teszt	0,64**				
Térszemlélet teszt	0,60**	0,53**			
Matematika jegy	0,73**	0,55**	0,64**		
Nem	-0,02	-0,04	-0,19	0,08	
Osztálytípus	-0,33**	-0,29	-0,30*	-0,45*	0,27

** $p<0,01$; * $p<0,05$ szinten szignifikáns korrelációs együttható

A két készségteszt hasonló – közepes szinten – korrelál, mint az ötödik-esek esetében. A nemek és az egyes tesztek, illetve a matematika jegyek között ezen az évfolyamon sem figyelhetünk meg összefüggéseket. Az általános iskola felső tagozatán tehát szignifikáns összefüggéseket találunk a geometria tantárgyi tudás, a matematika jegy és a készség-tesztek eredményei között, a matematika tudás szempontjából egyre gyengülő meghatá-rozottsága van a különböző osztálytípusoknak, a nemek pedig nem határozzák meg sem a teljesítményt, sem a képességek fejlődését.

Összegzés

Vizsgálatomban egy Bács-Kiskun megyei község, Harta általános iskolájában a felső tago-zatos tanulóknak az egybevágóság geometriai fogalmához kapcsolódó tudásszintjét, képessé-geik fejlettségét, illetve fejlődését elemeztem. A tanulók tantárgyi, a matematika tanterv kö-vetelményei alapján meghatározott ismereteit saját fejlesztésű mérőeszközök alkalmazásával mértem. A feladatlapok az 5., 7. és 8. évfolyam számára a 4., 6. és 7. osztályos követelmé-nyek teljes lefedésének szándékával, az alacsony minta elemszám miatt egy változatban ké-szültek. A rajzkészség fejlettségét Csapó Benő és Varsányi Zoltán által 1984-ben kifejlesztett, a készség két alapvető összetevőjét, a pszichomotoros komponenseket és a tanulók térszem-léletét vizsgáló két képességteszttel mértem. Mindkét teszt egy változatban, a tudásszint transzverzális vizsgálatába bevont (ugyanazon) tanulócsoportokkal került megíratásra.

A matematika teszteken az adott évfolyamon elvart követelményeknek megfelelő eredményt leginkább a 7. osztályosok, legkevésbé az 5. osztályosok érték el. Az átlagteljesítmények, szórások és eloszlások változásaiból megállapíthatjuk, hogy az általános iskola felső tagozatán egyre több és mélyebb geometriai ismerettel rendelkeznek a tanulók. A tesztek közös feladatainak átlagteljesítményei az életkor előrehaladtával fokozatosan nőnek, a szórások csökkenése mellett az eloszlások erőteljes jobbra tolódása a vizsgált terület fejlődését igazolja. A fejlődés nemcsak mennyiségi, a teljesítmények növekedésében megragadható változás, hanem a közös feladatelemek klasztereinek átrendeződése minőségi változást is jelez.

A rajzkészség pszichomotoros komponensei az általános iskola felső tagozatán intenzíven fejlődnek, a kapott eredmények követik a korábbi mérések alapján kimutatható tendenciákat, bár az 1984-ben mért 8. osztályos eredményeknél most a 7. és 8. évfolyamon is magasabb értékeket kaptunk. A térszemlélet mint a rajzkészség másik összetevője a 8. osztályos tanulónál sem éri el a 40 százalékos fejlettségi szintet, az 1984-ben mért 10. évfolyamos eredménytől csaknem 25 százalékkal marad el. A matematika teszteken nyújtott teljesítmény és a rajzkészség között szoros összefüggés van. A geometria feladatok megoldásában a pszichomotoros komponensek mindegyik évfolyamon azonos erősségű kapcsolatot mutatnak, a térszemlélet szerepe viszont a magasabb évfolyamokon nő.

A tanulói képességek alapján létrehozott osztálytípusok közül a kétnyelvű osztályokban szignifikánsan jobb a matematika teszteken nyújtott teljesítmény, a képességtesztek közül viszont csak a térszemlélet teszt eredményei mutatnak nem túl szoros összefüggést az osztálytípussal. A vizuális képességek, köztük a geometriaoktatás szempontjából (az életkor előrehaladtával egyre jelentősebb szerephez jutó) térszemlélet fejlesztése a jelenleginél nagyobb figyelmet érdemelne.

Irodalom

- Czeglédy István – Hajdu Sándor – Novák Lászlóné – Scherlein Márta (2001): *Matematika 1–8. Mintatanterv*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Csapó Benő (1999): Képességfejlesztés az iskolában – problémák és lehetőségek. *Új Pedagógiai Szemle*, 12. 4–12.
- Csapó Benő – Varsányi Zoltán (1985): *A rajzkészség fejlettségének vizsgálata a középiskolai tanulónál*. Acta Ped. Ser. Spec. Szeged.
- Eysenck, M. W. – Keane, M. T. (1997): *Kognitív pszichológia*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Frei Lászlóné (2002): *Az egybevágóság fogalmának fejlődése az általános iskola felső tagozatán*. Szakdolgozat. SZTE Pedagógiai Tanszék, Szeged.
- Hajdu Sándor – Koller Lászlóné – Novák Lászlóné (1998): *Matematika 1–10. Mintatanterv*. Calibra, Budapest.
- Hajós György (1987): *Bevezetés a geometriába*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Kárpáti Andrea – Gyebnár Viktória (1996): A vizuális képességek és a személyiség. A Leonardo Program értékelési rendszere. ELTE, Neveléstudományi Tanszék, Pro Educatione Gentis Hungariae Alapítvány, Budapest.
- Kárpáti Andrea – Gyebnár Viktória (1996): A vizuális képességek pedagógiai és pszichológiai mérésének összefüggései a Leonardo programban. *Magyar Pszichológiai Szemle*, LII. (36.), 4–6. 273–296.
- Kárpáti Andrea – Gyebnár Viktória (1997): A vizuális képességek értékelése. *Iskolakultúra*, 8. 6–55.
- Klein, S. (1980): *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata*. Akadémia Kiadó, Budapest. 44–45.
- Nagy József (1985): *A tudástechnológia elméleti alapjai*. OOK, Veszprém.
- Nagy József (2000): A kritikus kognitív készségek és képességek kritériumorientált fejlesztése. *Új Pedagógiai Szemle*, 7–8. 225–269.
- Rédling Elemér (1980): *Geometriai transzformációk*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Vidákovich Tibor (1998): Tudományos és hétköznapi logika: a tanulók deduktív gondolkodása. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris, Budapest. 191–220.