

## Az elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárása

*Ha beírjuk a számítógép keresőjébe a „combinatorial” szót, a legkülönbözőbb tudományágak, tevékenységi körök kombinatorikus „kezelésének” sokaságát kapjuk. Különösen sok címszó jelenik meg a kombinatorikus kémiáról. Ugyanis a kombinatorika matematikai eredményeinek robbanásszerűen terjedő alkalmazása a kutatásban, a fejlesztésben és a gyakorlati tevékenységekben a kombinatorikus kémia megszületésével vette kezdetét, ami egy magyar kutató, Furka Árpád (1982) nevéhez fűződik.*

Mára új helyzet alakult ki: a korábbiakhoz képest nagyságrendekkel komplexebb problémák, feladatok megoldása vált lehetővé a kombinatorikának köszönhetően, amelynek továbbfejlesztésében Lovász László kiemelkedő szerepet játszik. Egy magyar kémikus, Schön István (1999) kombinatorikus kémiai kutatásai alapján annak is szükségét érezte, hogy leírja gondolatait a kombinatív gondolkodásról. Tanulmányomnak az a célja, hogy a kombinatív képesség, gondolkodás kutatási eredményeire támaszkodva erre az új helyzetre a komplexitás szempontjából reflektáljon, az elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárásával.

Ami a kombinatív képesség, gondolkodás kutatását illeti, meglehetősen mellőzött témának nevezhető. Ez alól a helyzetkép alól csak Csapó Benő képez kivételt, aki mind a képesség struktúrájának feltárásában, mind az elsajátítási folyamatok országos reprezentatív mintákon történő feltérképezésében kiemelkedő eredményeket ért el. (Csapó, 1979, 1983a, 1983b, 1985a, 1985b, 1985c, 1987, 1988, 2001, 2003) „Amíg a Piaget által feltárt többi műveletnek áttekinthetetlenül hatalmasra duzzadt irodalma van, a kombinatív műveletekkel kapcsolatos fontosabb publikációknak csaknem teljes körét áttekinthetjük. Ezekre a munkákra általában az jellemző, hogy csak egy vagy néhány kombinatorikai feladatot használnak a vizsgálat során. Általában nem a struktúrát és a kombinatív jelleget emelik ki, hanem mereven ragaszkodnak (számértékekben, tartalomban, kontextusban) a Piaget által kialakított keretekhez, és fel sem vetik a piaget-i koncepció újrafogalmazásának, kiterjesztésének a lehetőségét vagy szükségességét, nem törekednek a kombinatív műveletek rendszerének tanulmányozására. Messze nem merítik ki a kombinatorika által kínált végtelen gazdagságot, az alapvető kombinatív struktúrák sokféleségét. Rendszerint a kombinatorikai feladatokat csupán mint eszközt használják valamely jelenség, általában a gondolkodás formális szintjének a vizsgálatára.” (Csapó, 1988. 20–21.) Ezeket a kutatásokat általában kis (olykor mindössze 15–20 fős) mintákon végezték. A Csapó Benő által elemzettek közül a következők említendők: Barratt (1975); Fischbein, Pampu, Minzat (1970); Henriques, Christophides, Moreau (1974); Kishta (1979); Roberge (1976); Scardamalia (1977). A hazai kutatások közül a fejlesztés gyakorlata szempontjából Lénárd Ferenc (1978, 1982) „variációs tanítás” nevű kutatásai érdemelnek figyelmet. Fontos tanulságokkal szolgál a kombinatorika iskolai tanításának

tanterve és módszertana is (a korábbi magyar publikációkból lásd például: *Gyapjas*, 1972; *Lovász – Vesztergombi – Pelikán*, 1971; *Varga*, 1967).

Míndezekre az előzményekre támaszkodva új szempontból vizsgálom a kombinatív képességet. A szegedi műhely kutatásai alapján a kombinatív képesség kialakulási folyamatának kritériumorientált diagnosztikus feltárására törekszem. (A kritériumorientált képességekutatásról, képességfejlesztésről lásd például: *Nagy*, 2000a, b, c, 2003a, b, c, 2004; *Nagy – Fazekasné – Józsa – Vidákovich*, 2002a, b; *Nagy – Józsa – Vidákovich – Fazekasné*, 2004) Amint a cím is jelzi, csak az elemi kombinatív képességről van szó. Ennek érdekében és a kombinatorika fent említett robbanásszerűen terjedő alkalmazásának figyelembevételével a komplexitás szempontjából újra kell értelmezni a kombinatív képesség szerveződését (struktúráját). Erről szól az első fejezet. Majd az elemi kombinatív képesség kritériumorientált diagnosztikus mérésére alkalmas teszt és a felmérés ismertetésére kerül sor, valamint a képesség kritériumokhoz viszonyított fejlődését, a fejlődést befolyásoló tényezőket, végül a pedagógiai tanulságokat ismertetem.

### Az elemi kombinatív képesség szerveződése

A korábbiakhoz képest fordulatot eredményező *Piaget*-féle kutatás (*Piaget – Inhelder*, 1951; *Inhelder – Piaget*, 1958) szenzo-motoros szinten három klasszikus kombinatív műveletet (kombinálás, permutálás, variálás) és az összes részalmaz képzését vizsgálta. A kísérleti személyek például különböző színű korongokat kaptak, és azokból kellett kirakni az összes lehetséges párosítást. A fiatalabb gyerekek szín szerint három- és négyféle, az idősebbek pedig négy- és hatféle korongot kaptak. Az eredmények alapján három stádiumnak nevezett fejlettségi szintet különböztettek meg: a véletlen próbálkozások, a részrendszeres és az összes lehetséges pár (összetétel, konstrukció) létrehozását eredményező szabályszerűség felismerésének és követésének stádiumát. Ezek a kísérletek annak demonstrálását is szolgálták (ami az egész *Piaget*-féle logikus gondolkodás alapja), mely szerint a logikus gondolkodás elsajátítása a műveletek kombinatorikus rendszerré szerveződése. (A téma részletes elemzését lásd: *Csapó*, 1988. 14–20.) A 20. század második felében végzett kutatások lényegében ebben a keretben, szellemben folytak.

Csapó Benő több ponton is kilépett ebből a rendszerből. Mindenekelőtt kidolgozta a kombinatív műveletek sajátos rendszerét, amelyben nyolc művelet szerepel az elsajátítás hipotetikus sorrendjét követve. (*Csapó*, 1988. 32.) Megmaradt az összetétel-előállítások stádiumok szerinti szintjeinek körében, de a mennyiségi kereteket kibővítette: a felhasználható elemfajták számát 2–8-ra, az összetételek hosszát 2–5-re, az összetételek számát pedig 3–20-ra növelte. Ennek következtében meg kellett adni a működtetendő művelet szabályát. Vagyis a szabályszerűség felismerése helyett a megkapott szabály megértése és követése (működtetése) volt a feladat. A kutatásokat három absztrakciós szinten végezte: tárgyak manipulálásával (szenzo-motoros szinten), képekkel (szenzoros szinten) és jelekkel (szimbolikus szinten). Míndezeknek megfelelően dolgozta ki a tesztrendszert, amely absztrakciós szintenként 8 szubtesztben 37 (összesen  $3 \cdot 37$ ) feladatot tartalmazott. Ezeket a feladatokat a 10, 14 és 17 éves tanulók országos reprezentatív mintáinak tagjai oldották meg. Ennek köszönhetően a klasszikus normaorientált pszichometria, majd egy később megismételt felmérés (*Csapó*, 2001) esetén a modern statisztikai eljárások eszközeivel részletes kép tárult fel a kombinatív képesség vizsgált rendszerének elsajátítási folyamatairól.

Amikor a bevezetőben a kombinatorika segítségével rendkívül komplex problémák, feladatok megoldási lehetőségét és gyakorlatát említettem, akkor a kombinatív képesség jobb megismerése és fejlődésének eredményesebb segítése érdekében a komplexitás figyelembevételéről van szó. Más témákkal (például a fogalmak, az összefüggések komplexitásával) kapcsolatban az elemi, egyszerű, összetett és komplex megnevezéseket hasz-

náltam. A kombinatív képesség esetében is előnyösnek ígérkezik ez a négyféle megkülönböztetés. Ez a tanulmány az elemi kombinatív képességről szól, aminek a jobb megértése érdekében a többi komplexitási szint átfogó jellemzéséről lehet csak szó.

A komplex kombinatív képességet az jellemzi, hogy olyan mennyiségű összetételt is képes kezelni, a tesztelésre érdemes összetételeket az összes lehetségesből kiválasztani (ezen a szinten működik például a kombinatorikus kémiai kutatás), amelynek a darabszámát ugyan számítógéppel meg lehet határozni, de az összetételek előállítása még számítógépes szimulációval is olyan sok időbe kerülne, ami lehetetlenné tenné a feladat megoldását. De az ilyen felsorolásnak értelme sincs, mert semmit nem lehetne kezdeni az ilyen irdatlan halmazzal, amelynek elemszáma meghaladhatja a világegyetem atomjainak számát is. Az összetett kombinatív képesség alapos kombinatorikai ismereteket feltételez, amelyeknek köszönhetően tisztázható, hogy a szóban forgó (feltételezett) összetételrendszer a soktucatnyi lehetőség közül mely szerveződési típushoz tartozik, aminek alapján az összetétel-mennyiség kiszámítási módjának és a felsorolás algoritmusának megválasztása lehetővé válik. Továbbá számítógéppel még ésszerű idő alatt előállítható az összes összetétel, és megfelelő módszerekkel kiválaszthatók a megismerésre, tesztelésre alkalmasnak vélt összetételek. Az egyszerű kombinatív képesség nem kíván kombinatorikai képzettséget, számítógépet. Elfogadható idő alatt előállítható a legfőbb néhány tucatnyi összetétel, és elvégezhető a kapott ismeretek hasznosítása. A Piaget-féle és a Csapó-féle kutatások feladatainak többsége egyszerű kombinatív képességgel oldható meg.

Mielőtt az elemi kombinatív képesség szerveződését ismertetném, vegyük számba az alapvető kombinatorikai alkotóelemeket: elemek, elemfajták, az elemfajták elemeiből szerveződő összetételek, összetételrendszer (az összes lehetséges összetétel „felsorolása”), valamint az összetételek, az összetételrendszer szerveződésének, előállításának szempontrendszere (szabályszerűsége, szabálya). Az elemfajták egy halmaz részhalmazai, az elemek pedig a részhalmazok elemei. Az összetételek létrejöttének kiinduló feltétele, hogy a szükséges elemfajták ekvivalens elemei a szükséges (elvileg korlátlan) számban hozzáférhető legyenek. A különböző betűk például elemfajták, betűfajták. Az összes B betű például elemfajta (betűfajta), az egyes egyedi B betűk pedig elemek. Az összetételek meghatározott számú különböző elemfajták elemeiből szerveződnek, és meghatározott az összetételek maximális hossza, vagyis az elemfajtákból felhasznált elemek darabszáma. A szerveződés szempontjai (a szabály szempontjai) a következők:

- az összetételek (a) egy vagy (b) több különböző halmaz elemfajtaiból szerveződnek;
- új összetétel (a) az elemek sorrendjével is szerveződhet, (b) az elemek sorrendje nem képezhet új összetételt;
- egy összetételben ugyanannak az elemfajtának az eleme (a) csak egyszer szerepelhet, (b) többször is szerepelhet;
- az összetételek meghatározott maximális hosszánál (elemszámánál) rövidebb összetételek is (a) szerveződnek, (b) nem szerveződnek.

Az összetételek szerveződésének ez a négy általános szempontja két-két változatával (a Descartes-féle szorzatnak megfelelően) 16 ( $2^4$ ) összetétel-szerveződési módot, az ember összetételképző viselkedésére vonatkoztatva: kombinatív műveletet, valamint ennek a pszichikus feltételét képző 16 kombinatív részképességet definiál.

A képességek a szegedi műhely értelmezésében készségek, részképességek, rutinok és ismeretek sajátos funkciójú pszichikus rendszerei. A kombinatív képesség a kombinatív készségek, részképességek (esetünkben 4-fajta készség és 16-fajta részképesség, lásd az 1. táblázatot), e készségek rutinjai (ezeket lásd később), valamint az elemek, az elemfajták és összetételek tárgyi ismeretei és a kombinatorikai ismeretek (mint pszichikus rendszerek), amelyeknek köszönhetően a megismerendő, hasznosítható összetételek megtalálhatók valamennyi összetétel előállításával vagy más módszerekkel. Lássuk mindezek alapján az elemi kombinatív képességet.

Eddigi képességekutatási tapasztalataim alapján az a hipotézis fogalmazható meg, hogy a képességeknek létezik minimális komplexitása, amely a készségek meghatározott szempontok szerinti kombinatorikus rendszere (a példák készségrendszerei és az elemi kombinatív képesség készségrendszere is Descartes-féle szorzatok). Ilyen például a nyolc elemi összefüggés. Mivel az összefüggés „csak akkor” vagy „nem csak-akkor” feltételű, továbbá szükségszerű vagy valószínű velejárójú, valamint okság vagy együttjárás, ezért nyolcfajta ( $2^3$ ) összefüggés lehetséges. Amennyiben a feltétel is és a velejárója is minimális számú (esetünkben egy-egy), akkor az elemi összefüggések kombinatorikus rendszerét kapjuk (Nagy 2000b).

*Pedagógiai szempontból az eredményesebb képességfejlesztés kiinduló feltétele a fejlesztendő képesség elemi szintű szerveződésének, elsajátítási folyamatainak ismerete és ennek alapján az optimális használhatóságú elsajátítása. Az eredményesebb képességfejlesztés egyik alapvető akadálya, hogy nem ismert a minimális komplexitás komponenseinek (készségeinek, részkészségeinek, rutinjainak, ismereteinek) rendszere. Ennek következtében véletlenszerű, hogy mely komponensek elsajátítása történik meg, illetve ha működőképes is valamennyi komponens, a véletlenül múlik, hogy rendszerré (képességgé) szerveződnek-e. Mindeközben az optimális szinten még nem működő elemi komplexitású képességünkkel folyamatosan szembesülünk kudarcra ítélt magassabb komplexitású problémákkal, gyakorlati és tanulási feladatokkal.*

szó. (erről lásd például Nagy, 2000. 80–82.) A kettő-négy tárgyat, sajátságot, információt nevezhetjük optimális mennyiségnek. Négynél több hasonló elem esetén azokat egyetlen egységként (halmazként) kezeljük, majd a halmazokat átfogóbb halmazok által alakítjuk egységgé. A négy körülínel több elem, halmaz, a halmazok négy körülínel több szintű hierarchiája esetén belső munkamemóriánk csődöt mond. Itt ér véget az ismeréssel emlegetett „józan paraszti ész”. (Gondoljon az olvasó például arra, hogy egy viszonylag egyszerű osztást sem tudunk fejben elvégezni belső munkamemóriánk korlátja miatt.) Ezt a korlátot a külső munkamemória segítségével tudjuk feloldani: észlelhető elemek manipulálásával, illetve az írásbeliségnek köszönhetően (példánk esetében az írásbeli osztás készségével).

Az eddigieket figyelembe véve az elemi képesség minimális számú (1) halmazzal, a halmazok minimális számú (2) részalmazzaival, elemfajtáival és minimális számú elemmel, vagyis az összetételek minimális hosszával (1–2) működik. A halmazok száma határozza meg a szerveződés fajtáinak számát, az emberre vonatkoztatva: a műveletfajták, illetve a készségfajták számát. Az elemi képességből bontakozhat ki az egyszerű, az összetett és a komplex képesség. A nem vagy részlegesen, hibásan működő elemi képességgel a magasabb komplexitású szintek nem működhetnek, nem sajátíthatók el. Ezért pedagógiai szempontból az eredményesebb képességfejlesztés kiinduló feltétele a fejlesztendő képesség elemi szintű szerveződésének, elsajátítási folyamatainak ismerete és ennek alapján az optimális használhatóságú elsajátítása. Az eredményesebb képességfejlesztés egyik alapvető akadálya, hogy nem ismert a minimális komplexitás komponenseinek (készségeinek, rész-készségeinek, rutinjainak, ismereteinek) rendszere. Ennek következtében véletlenszerű, hogy mely komponensek elsajátítása történik meg, illetve ha működőképes is valamennyi komponens, a véletlenül múlik, hogy rendszerré (képességgé) szerveződnek-e. Mindeközben az optimális szinten még nem működő elemi komplexitású képességünkkel folyamatosan szembesülünk kudarcra ítélt magasabb komplexitású problémákkal, gyakorlati és tanulási feladatokkal.

Az 1. táblázat fejroviatának harmadik sorában az országos reprezentatív felmérésünkben résztvevő évfolyamok szerepelnek. A vonallal elválasztott négy sor felső felében a különböző évfolyamokon elért átlagok olvashatók százalékpontban kifejezve. Ezeknek az adatoknak itt az a szerepük (követve Csapó Benő szempontját, 1988. 32.), hogy az elemi kombinatív készségek elsajátítási sorrendjét szemléltessék (az adatok elemzése később következik). Az egyes cellákban baloldalt a második sorban lévő zárójeles számok a megfelelő feladat teszten szereplő sorszámát jelölik (például a „4”) a bal felső cellában). Végül: a nagybetűk közötti „,” jel azt jelenti, hogy az előtte és a mögötte lévő is lehetséges összetétel, de csak az egyik lehet tagja az összetételrendszernek.

1. táblázat. Az elemi kombinatív képesség szerveződése

| Betűfajták száma |                             | 2   |   | 3  |  | Átlag  |
|------------------|-----------------------------|---|---|--|--|--|
| (2+2)            |                             | 2   |   | 2  |  |  |
| Szavak hossza    |                             | (2, 3)  | 2   | 1 és 2   | 2  | 1 és 2   |
| Évfolyamok       |                             | 4. 5. 6. 8. 10.   | 4. 5. 6. 8. 10.   | 4. 5. 6. 8. 10.  | 4. 5. 6. 8. 10.  | 4. 5. 6. 8. 10.                                  |
| Sorrend<br>IGEN  | Azonos<br>betűfajta<br>NEM  | 73 74 78 87 88<br>4) AB BA  | 60 59 67 79 83<br>9) A B AB BA                          | 64 64 71 81 85<br>1) AB BA AC<br>CA BC CB              | 43 47 54 70 75<br>6) A B C<br>AB BA CA CA<br>BC CB           | 60 61 68 79 83<br>ismétlés nélküli<br>VARIÁLÁS   |
|                  | Azonos<br>betűfajta<br>IGEN | 64 63 69 80 82<br>8) AA BB<br>AB BA<br>24                         | 54 54 63 74 79<br>3) A B AA BB<br>AB BA<br>„Összes ...” | 48 50 58 70 75<br>10) AA BB CC<br>AB BA<br>AC CA BC CB | 43 45 54 69 72<br>15) A B C AA<br>BB CC AB BA<br>AC CA BC CB | 52 53 61 73 77<br>ismétléses<br>VARIÁLÁS         |
| Sorrend<br>NEM   | Azonos<br>betűfajta<br>NEM  | 54 56 62 78 79<br>14) BA/AB<br>A1 A2 B1 B2<br>„Descartes-szorzat” | 46 45 55 69 72<br>12) A B BA/AB<br>„Összes részhalmaz”  | 44 47 56 72 75<br>7) AB/BA<br>AC/CA BC/CB              | 33 36 45 60 67<br>5) A B C AB/BA<br>AC/CA BC/CB              | 44 46 55 70 73<br>ismétlés nélküli<br>KOMBINÁLÁS |
|                  | Azonos<br>betűfajta<br>IGEN | 46 47 55 71 72<br>13) AA BB<br>BA/AB<br>12                        | 39 39 49 64 69<br>2) A B AA BB<br>BA/AB                 | 34 37 46 63 66<br>16) AA BB CC<br>BA/AB<br>CA/AC BC/CB | 28 31 40 56 62<br>11) A B C AA<br>BB CC BA/AB<br>CA/AC CB/BC | 37 39 48 64 67<br>ismétléses<br>KOMBINÁLÁS       |
| Átlag            |                             | 60 60 66 79 80  | 50 49 59 72 76  | 48 50 58 72 75   | 37 40 48 64 69   | 49 50 58 72 75                                   |

Az elemi kombinatív képesség (amint az 1. táblázat tónusos része mutatja) egy halmaz (ez az első szempont) részalmazzaival (elemfajtáival) elemeiből szerveződő összetételek előállítását teszi lehetővé, ha sem az elemfajták száma, sem az összetételek elemszá-

ma nem több kettőnél (az egynél több halmaz esetéről a következő bekezdésben lesz szó). A szerveződések, illetve a készségek fajtáit a fent ismertetett további három szempont határozza meg. A felhasznált elemek sorrendje (a második szempont) adja a két klasszikus nevű szerveződést, műveletet, készséget: kombinálás, ha a felhasználható elemek sorrendjével nem képződhet új összetétel, és variálás, ha képződhet. A felhasznált elemfajta ekvivalens elemeiből csak egyet vagy egynél többet (ugyanolyan elemet ismételt) is be lehet építeni az összetételbe (harmadik szempont). Ez adja klasszikus elnevezéssel az ismétlés nélküli és az ismétléses változatokat, vagyis az ismétlés nélküli és az ismétléses kombinálást, valamint az ismétlés nélküli és az ismétléses variálást. A negyedik szempont szerint az összetételek maximális hosszánál (elemszámánál) rövidebb összetételek is képződnek, képezendők vagy nem. A „nem” az alapeset (a sötétebb tónusú oszlop), ezért eredeti nevüket nem kell jelzővel ellátni, a világosabb tónusú oszlop négy változatának nevét pedig az „összes” jelzővel célszerű kiegészíteni, mivel a második sorban lévő változat szokásos neve: összes ismétléses variáció. Az összes ismétlés nélküli kombinálás szokásos neve pedig: „az összes részhalmaz képzése.” Az így kapott nyolcféle összetételrendszer előállítását lehetővé tevő négyféle készség és nyolcféle rész-készség elemi kombinatív képességnek tekinthető.

Kérdés, hogy az egynél több halmaz elemfajtáinak elemeiből szerveződő összetételrendszerek minimális elemfajták és az összetételek minimális elemszáma esetén az elemi vagy az egyszerű készség körébe sorolandók-e. Tekintsük a minimális esetet, a két halmazt, és legyen mindkettőnek két elemfajtája. Ez a kiindulás négy elemfajta kezelését igényli, ami az egyhalmazú alapváltozat minimális elemfajtáinak duplája. Ennek elenére, ha sem a sorrenddel, sem az elemfajták ekvivalens elemeivel nem szerveződhetnek, nem képezhetőek összetételek (vagyis a „kéthalmazú” ismétlés nélküli kombinálás esetén), akkor ez a művelet olyan egyszerű, hogy megfelel az elemi szint követelményeinek. Ez a Descartes-féle szorzan elemi szintje. (A permutáció a többhalmazú változatok speciális esete annak következtében, hogy az elemfajták felhasználandó elemeinek darabszámát is előírja.)

A sötétebb tónusú oszlop négy cellájának vonallal elválasztott alsó felében található a kéthalmazú kombinálással és a kéthalmazú variálással előálló, előállítható összetételrendszerek. Mint látható, a kéthalmazú ismétléses kombinálás, különösen a kéthalmazú ismétléses variálás már nehezen vagy alig alkalmazható a szerveződés szabályának felismerése, ismerete és követése nélkül, vagyis az egyszerű készség működése nélkül. Nem is beszélve a világosabb satírozású négy elemi készség kéthalmazú változatairól. Tekintettel arra, hogy a nyolc elemi művelet kéthalmazú változatainak többsége nem tarthat az elemi készségek (szerveződések, műveletek) körébe, ezért döntöttem úgy, hogy a kéthalmazú összetételrendszerek minimális komplexitású változatai közül nem emelem ki az elemi szintnek megfelelő Descartes-féle szorzatot. Ez a Piaget-féle kutatások és a Csapó Benő-féle kutatások gazdag eredményeire támaszkodva, az egyszerű kombinatív képesség rendszerének feltárási és az elsajátítási folyamatok kritériumorientált diagnosztikus feltérképezési feladatainak körébe tartozik.

A második kérdés, hogy az elemfajták és az összetétel-elemek minimális számának növelésével nem juthatunk-e újabb elemi műveletekhez. Ha az összetételek elemszámát (hosszát) kettő helyett háromnak vesszük, akkor az ismétlés nélküli kombinálás kivételével az elemi szint követelményeit meghaladó komplexitás adódik. Ezért csak az elemfajták számát növeltem meg kettőről háromra. Ebben az esetben a három elemfajtából létrejövő maximum kételemű és annál kevesebb elemű összetételek nem az összes lehetőséget adják, mint a világosabb tónusú összetételrendszerek esetében, hanem annál kevesebbet. Ez az „összes részhalmazhoz” (a világosabb tónusúakhoz) képest új változat lehetősége, új mennyiségi szempont. Így alakult ki az *1. táblázatban* szemléltetett minimális rendszer, amely az elemi kombinatív képességgel működtethető. Az elemi és az

egyszerű kombinatív képesség közötti határesetek miatt végeredményben tapasztalaton alapuló megállapodás kérdése, hogy csak a nyolc satírozott esetet tekintsük-e az elemi kombinatív képesség készségrendszerének vagy még más típusokat is ide soroljunk. A fenti megfontolások mellett majd az elsajátítási folyamatokat jellemző adatok is alátámasztják, hogy az 1. táblázatban szemléltetett rendszert célszerű elemi kombinatív képességnek tekinteni.

Az 1. táblázatban közölt adatok a négy klasszikus nevű készség 16 elemi részkészségének elsajátítási sorrendjét mutatják. Az elvárhatónak megfelelően az elemfajták számának és az összetétel-elemek számának növekedésével egyre nehezebb a megoldás, egyre később következik be az elsajátítás (a sorokban balról jobbra haladva). A négy klasszikus művelet készségének elsajátítása ezzel szemben nem az elvárható sorrendet adja. A legegyszerűbb az ismétlés nélküli kombinálás, hiszen sem a sorrend, sem az ekvivalens elemfajta nem képezhet összetételt. Az összetételek száma itt a legkevesebb, ami azt jelenti, hogy könnyebb áttekinteni, ellenőrizni, hogy valamennyi összetétel létrejött-e. A bonyolultság növekedését és az elsajátítás szintjét követve az alábbi sorrendet kapjuk:

| BONYOLULTSÁGI SORREND       | ELSAJÁTÍTÁSI SORREND        |
|-----------------------------|-----------------------------|
| ismétlés nélküli kombinálás | ismétlés nélküli variálás   |
| ismétlése kombinálás        | ismétlése variálás          |
| ismétlés nélküli variálás   | ismétlés nélküli kombinálás |
| ismétlése variálás          | ismétlése kombinálás        |

Az elsajátítási sorrendet kifejező adatok nagymértékű különbségeket és a bonyolultsági sorrendtől eltérő elsajátítási sorrendet mutatnak: a kombinálás és a variálás sorrendje fölcserélődik, de az ismétlés és az ismétlés nélküliség bonyolultsági sorrendjét követi az elsajátítási sorrend.

### A kritériumorientált diagnosztikus teszt és a felmérés

Az 1. táblázat értelmében az elemi kombinatív képesség négy klasszikus nevű készsége és 16 részkészsége összesen 16 feladattal működtethető. Vagyis az elsajátítás fejlettségének, fejlődésének diagnosztikus feltérképezése 16 feladattal valósítható meg. A manipulatív (szenzo-motoros), a szenzoros, a szimbolikus és a fogalmi szint közül a szimbolikus szintre esett a választás, melynek elemfajtái a nyomtatott nagybetűk (az A, a B és a C), elemei az egyes egyedi betűk. A fogalmi szint tartalmi validitási problémákkal terhelt. Ugyanis az elemfajtaként használt fogalmak tárgyi ismeretének színvonala befolyásolhatja a kombinatív feladatok megoldásának eredményességét. Az eddigi kutatási eredmények szerint az elemi kombinatív képesség manipulatív szintű elsajátítása óvodás korban kezdődik, és a gyermekkor végéig a tanulók többsége manipulatív absztrakciós szinten feltehetően elsajátítja az elemi kombinatív képességet (ennek felmérése a 4-10 évesek körében a soron következő kutatás feladata). Mivel a képi (szenzoros) szint eredményei hasonlóak a manipulatív szintű eredményekhez (Csapó, 1988. 66–67. és 88–89.), a 10–16 éves célpopuláció számára a szimbolikus szintet célszerű használni (a választás helyességét előkészítő kutatásokkal ellenőriztük).

Az előző fejezetben a képességről az olvasható, hogy készségek, részkészségek, rutinok és ismeretek sajátos funkciójú pszichikus rendszere. A négy elemi készséget és 16 részkészséget már ismerjük. Mint említettem, kombinatorikai ismeretekre és magának a kombinatív képességnek az ismeretére az elemi kombinatív képesség működéséhez nincsen szükség. Az elemfajtákra vonatkozó tárgyi ismeretek viszont nélkülözhetetlenek. Még a betűk mint szimbólumok esetében is. Aki nem ismeri a betűket és az egymáshoz kapcsolás szabályát, nemcsak az AB, hanem például az „A fordított B” vagy az „A fekvő B” változatot is újabb összetételnek minősítheti. A negyedik és magasabb évfolyamú

tanulók esetében a betűkre (mint elemfajtakra, elemekre) vonatkozó tárgyi ismeretek hiánya már nem okozhat tartalmi validitási problémákat.

*Nagyon alaposan olvasd el, gondold végig a következő néhány mondatot.*

*Megértésüktől függ a feladatok megoldásának eredménye!*

Az alábbi feladatokban betűkből kitalált szavakat kell képezni (egy betű is lehet szó).

Például: A, AA, B, BB, AB, BA, AC stb., amelyeket be kell írni az üres pontsorra.

**Csak akkor jó a megoldás, ha az ÖSSZES LEHETSÉGES SZÓ (se több, se kevesebb)**

*be van írva az üres pontsorra. Arra kell rájönni, hogy hány szó lehetséges, és melyek azok.*

Minden feladatban elő van írva, hogy

a szavakat mely betűkből kell képezni. (A, B vagy A, B, C);

minden szó vagy csak két betűből álljon, vagy egy és két betűből is;

a szavakban vagy szerepelhet azonos betű is (pl. AA), vagy azonos betű nem szerepelhet;

a betűk sorrendje is új szót képez (AB, BA), a betűk sorrendje nem képez új szót (AB).

- |  |                  |
|--|------------------|
| 1) Az A, a B és a C betűkből képezd az ÖSSZES <u>két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű nem</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje is</u> képezhet új szót.         | a<br>b<br>c<br>d |
| 2) Az A, és a B betűkből képezd az ÖSSZES <u>egy és két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű is</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje nem</u> képezhet új szót.      | a<br>b<br>c<br>d |
| 3) Az A és a B betűkből képezd az ÖSSZES <u>egy és két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű is</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje is</u> képezhet új szót.        | a<br>b<br>c<br>d |
| 4) Az A és a B betűkből képezd az ÖSSZES <u>két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű nem</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje is</u> képezhet új szót.              | a<br>b<br>c<br>d |
| 5) Az A, a B és a C betűkből képezd az ÖSSZES <u>egy és két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű nem</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje nem</u> képezhet új szót. | a<br>b<br>c<br>d |
| 6) Az A, a B és a C betűkből képezd az ÖSSZES <u>egy és két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű nem</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje is</u> képezhet új szót.  | a<br>b<br>c<br>d |
| 7) Az A, a B és a C betűkből képezd az ÖSSZES <u>két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű nem</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje nem</u> képezhet új szót.        | a<br>b<br>c<br>d |
| 8) Az A és a B betűkből képezd az ÖSSZES <u>két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű is</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje is</u> képezhet új szót.               | a<br>b<br>c<br>d |
| 9) Az A, és a B betűkből képezd az ÖSSZES <u>egy és két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű nem</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje is</u> képezhet új szót.      | a<br>b<br>c<br>d |
| 10) Az A, a B és a C betűkből képezd az ÖSSZES <u>két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű is</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje is</u> képezhet új szót.         | a<br>b<br>c<br>d |
| 11) Az A, a B és a C betűkből képezd az ÖSSZES <u>egy és két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű is</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje nem</u> képezhet új szót. | a<br>b<br>c<br>d |
| 12) Az A és a B betűkből képezd az ÖSSZES <u>egy és két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű nem</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje nem</u> képezhet új szót.     | a<br>b<br>c<br>d |
| 13) Az A, és a B betűkből képezd az ÖSSZES <u>két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű is</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje nem</u> képezhet új szót.            | a<br>b<br>c<br>d |
| 14) Az A és a B betűkből képezd az ÖSSZES <u>két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű nem</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje nem</u> képezhet új szót.            | a<br>b<br>c<br>d |
| 15) Az A, a B és a C betűkből képezd az ÖSSZES <u>egy és két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű is</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje is</u> képezhet új szót.  | a<br>b<br>c<br>d |
| 16) Az A, a B és a C betűkből képezd az ÖSSZES <u>két betűből</u> álló különböző szót.<br>A szavakban <u>azonos betű is</u> szerepelhet. A betűk <u>sorrendje nem</u> képezhet új szót.        | a<br>b<br>c<br>d |



A kombinatív képesség működéséhez úgynevezett egységfelismerő, egységképző és viszonyfelismerő, viszonyképző rutinokra van szükség (a rutinokról lásd Nagy, 2000. 6. fejezet). Az elemfajtákat és elemeiket, valamint az összetételeket a másodperc tört része alatt működő egységfelismerő rutinoknak köszönhetően minősíthetjük ekvivalensnek vagy különbözőnek. Enélkül lehetetlen lenne az összetételek képzéséhez szükséges elemek kiválasztása és a létrehozott összetételek különbözőségének felismerése. A viszonyfelismerő, viszonyképző rutinok az elemek kapcsolódásainak felismerését, képzését teszik lehetővé.

A főntebb olvasható tömörített, kicsinyített tesztben szereplő 16 feladat fedi le szimbolikus szinten az elemi kombinatív képesség négy készségének 16 részkészségét, sorolással kapott sorrendben. (Az eredeti teszt egy A/4-es géppapír két oldalán szerepel.) A szokásnak megfelelően az első oldal tetejére kellett beírni a feldolgozáshoz szükséges adatokat: a tanuló nevét, nemét, évfolyamát, osztályát, iskolatípusát, legutóbbi átlagos tanulmányi eredményét, az iskola azonosító számát, a település típusát. A teszt második oldalának végén lévő négyoszögbe a megoldásra felhasznált percek számát kellett beírni. A felhasznált idő átlagai azt jelzik (2. táblázat), hogy a fáradtság nem befolyásolhatta az eredményeket.

2. táblázat. Jóságmutatók

| Évfolyamok   | Tanulók száma | Reliabilitás, $\alpha$ |         | Item, $ki$ $\alpha$<br>min-max | Percek száma, átlag | Átlag %p |         | Relatív szórás % |         |
|--------------|---------------|------------------------|---------|--------------------------------|---------------------|----------|---------|------------------|---------|
|              |               | 64 item                | 16 item |                                |                     | 64 item  | 16 item | 64 item          | 16 item |
| 10. gimn.    | 1292          | 0,96                   | 0,88    | 0,86–0,88                      | 16                  | 91       | 89      | 18               | 21      |
| 10. szakk.   | 1520          | 0,97                   | 0,90    | 0,90–0,91                      | 19                  | 81       | 77      | 28               | 34      |
| 10. szakí.   | 849           | 0,97                   | 0,92    | 0,91–0,92                      | 21                  | 58       | 50      | 50               | 64      |
| 10. együtt   | 3661          | 0,98                   | 0,93    | 0,92–0,93                      | 18                  | 79       | 75      | 32               | 40      |
| 8. ált. isk. | 1735          | 0,98                   | 0,93    | 0,92–0,93                      | 19                  | 76       | 71      | 36               | 44      |
| 6. ált. isk. | 2728          | 0,98                   | 0,93    | 0,92–0,93                      | 21                  | 64       | 58      | 47               | 59      |
| 5. ált. isk. | 2056          | 0,98                   | 0,93    | 0,93–0,93                      | 22                  | 57       | 50      | 53               | 68      |
| 4. ált. isk. | 3022          | 0,98                   | 0,92    | 0,92–0,92                      | 23                  | 56       | 48      | 54               | 69      |

A fejlődés diagnosztikus feltérképezését szolgáló felmérés rétegzett országos reprezentatív mintával történt 2003 májusában. A minták nagyságának adatai a 2. táblázatban olvashatók. A 4. és a 10. évfolyamon több, mint háromezer tanuló vett részt, a többi évfolyamon pedig kétezer körüli a tanulók száma. A 10. évfolyam három iskolatípusra bontott mintái is ezernyi tanulót tettek ki. Ezek olyan nagy minták, hogy pedagógiai szempontból fölösleges szignifikancia-vizsgálatokat végezni.

A feladatok értékelése a javítókulcs segítségével négy szempont szerint történt a teszt jobb oldalán található négy négyoszögbe beírt 0 vagy 1 számjeggyel. Az elemi képességet mérő szimbolikus szintű feladatok többsége olyan egyszerű, hogy szabályfelismerést nem igényel. Ezért a Piaget-féle három elsajátítási stádium (próbálkozás, részrendszerek, a teljes rendszer felismerése) nem értékelhető, nem használható mint értékelési szempont. Az elemi képesség szimbolikus szintje megadott szabály követésével, alkalmazásával működtethető, értékelhető. Ennek érdekében (amint a teszt feladatai mutatják) a megoldás szabályai nagyon pontosan, egyértelműen megfogalmazottak. Vagyis az elemi kombinatív képesség szimbolikus szintű működésének szerves része a viszonylag bonyolult szabály megértése és követése. Ez viszont megfelelő szintű olvasáskészséget feltételez, ami validitási problémát okozhat. A probléma csökkentése érdekében a felmérés előtt a pedagógus szóban is elmagyarázta a teszt elején szereplő instrukciókat a példákkal együtt. Pedagógiai szempontból, az eredményesebb fejlesztést segítő, fontos megismerni a tipikus hibákat. Ezért a Piaget-féle elsajátítási stádiumok helyett hibaelemzést le-

hetővé tevő itemek is szerepelnek a teszten. Mint említettem, minden feladat négy szempont szerint értékelhető (lásd a teszt „a-d” négyezőjeit). Az „a” szempont teszi lehetővé a hibaelemzés nélküli 16 ítemes értékelést, a „b-d” szempontok pedig a hibaelemzést.

Hibaelemzés nélküli értékelés esetén minden feladatot csak egy, az „a” szempont szerint kell értékelni: hibátlan-e a megoldás, vagyis mindenben megfelel-e a javítókulcsban megadottnak, igen vagy nem. Ha hibátlan a megoldás, akkor 1-et, ha hibás vagy hiányzik, akkor 0-át írunk az „a” négyezőbe. Ha hibaelemzést is kívánunk végezni, és amennyiben a feladat megoldása hibátlan (vagyis az „a” négyezőben 1 szerepel), akkor a „b-d” négyzőgekbe is 1-et írunk, hiányzó megoldás esetén pedig mind a négy négyezőbe 0-át.

Hibaelemzés csak abban az esetben lehetséges, ha van megoldás, de az nem hibátlan, vagyis a hiba miatt 0 szerepel az „a” négyezőben. Ha tartalmilag hibátlan a megoldás (vagyis az összetételek jók), és a mennyiségi hiba legfőljebb egy (vagyis az összetételek száma eggyel több vagy kevesebb), akkor a „b” szempont 1, ha több, mint egy a mennyiségi hiba, akkor 0. Ha mennyiségileg hibátlan a megoldás, és legfőljebb egy tartalmilag hibás összetétel fordul elő, akkor a „c” szempont 1, ha egynél több összetétel hibás, akkor 0. Ha tartalmilag is és mennyiségileg is csak egy-egy hiba van, akkor a „d” szempont 1, ha a tartalom vagy/és a mennyiség szerint egynél több hiba van, akkor a „d” szempont 0.

A „b-d” szempont szerinti hibaelemzés segítségével megismerhető, hogy milyen jellegű és mértékű hibákat követnek el az elsajátítási folyamat különböző szintjén lévő tanulók, és milyen arányban fordulnak elő a különböző hibák. Ennek az eredményesebb fejlesztés szempontjából van jelentősége. A kapott adatok ismertetésére majd a fejlesztés módszereiről szóló tanulmányban kerülhet sor. Most azért ismertettem a hibaelemzést szolgáló javítási módot, mert a hibaelemzést is figyelembe vevő 64 feladatelemes értékelés és a 16 feladat egy-egy ítemes értékelésével (ami az „a” szempontnak felel meg) összehasonlítható a két változat megbízhatósága (reliabilitása). Amint a 2. táblázatban olvasható, a 64 ítemes változat reliabilitása rendkívül magas (0,98) mind az öt évfolyamon (ennél egy kicsivel alacsonyabbak a mutatók a 10. évfolyam iskolatípusonkénti számítások eredményeként). A 16 ítemes értékelés esetén is igen jók a reliabilitási mutatók (az öt évfolyam közül egyben 0,92, a többiben 0,93, a 10. évfolyam iskolatípusok szerinti bontásával itt is egy kicsivel alacsonyabb). Az „Item ki,  $\alpha$ ” oszlopban szereplő számok a feladatelemek itemkihagyással számított megbízhatóságát mutatják. Az elsajátítás évfolyamonkénti átlagai és szórásai a 64 ítemes értékelési változattal valamivel kedvezőbb képet mutatnak, mint a 16 ítemes változattal kapott adatok. Ez természetes következménye annak, hogy a hibaelemzést szolgáló itemekkel plusz pontokat lehet szerezni. Mindezek alapján kimondható, hogy az „a” szempont 16 elemű értékelésével is megbízható képet kaphatunk az egyes tanulók, az osztályok, az évfolyamok fejlettségi szintjéről, a fejlődés folyamatairól. Ezért a következő fejezetben csak a 16 ítemes változattal kapott eredményeket fogom elemezni.

### **Az elemi kombinatív képesség kritériumokhoz viszonyított fejlődése**

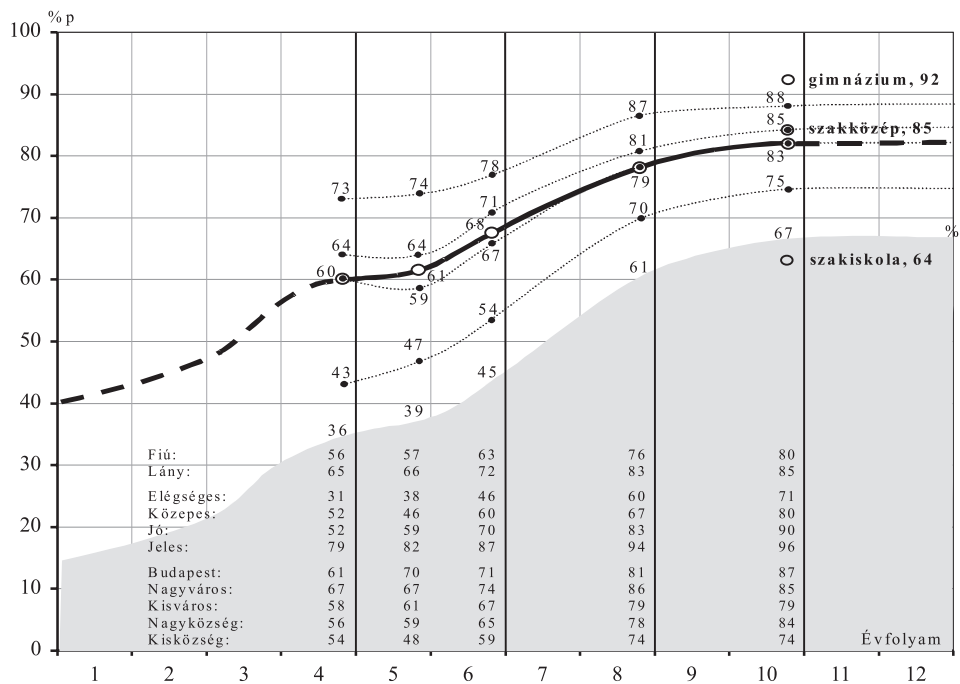
Az iskolai értékelés szinte kizárólag normaorientált minősítés, melynek az a jellemzője, hogy normául választott értékhez, rendszerint az átlaghoz viszonyítva minősíti a tanulót, az osztályt, az évfolyamot, az országot (ilyen az osztályozás, a vizsga, a szokásos nemzetközi és hazai felmérés). Ez a fajta értékelés sok hasznos információt szolgáltat, de a tanulást, a tanítást közvetlenül segítő diagnózisra kevésbé alkalmas. A kritériumorientált értékelés viszonyítási alapja az elérendő elsajátítási szint, amelynek eddig négyféle kritériumát használtuk: tartósság, kiépülés, szabályozási (absztrakciós) szint és optimális használhatóság (működés, begyakorlottság). A kritériumorientált értékelés elsősorban az alapvető képességek, készségek eredményesebb elsajátítását, fejlesztését szolgálja (a téma részletes ismertetését lásd *Nagy, 2003b*, a jelen tanulmányban csak az elemi kombinatív képesség elsajátítási kritériumainak ismertetése a cél).

A tartósság szempontjából aktuális, időleges és állandósult tudást, elsajátítási kritériumot használhatunk. Az időleges szint értékelésére előzetesen fel lehet készülni, ezzel szemben az állandósult szintet csak úgy lehet értékelni, hogy kizárjuk az értékelésre való felkészülés lehetőségét. A kiépülés kritériuma teszi lehetővé a tartalmi diagnózist, vagyis azt, hogy az értékelendő képesség, készség összetevőinek elsajátítási szintjéről is képet kapjunk. Ezt a célt szolgálta a szerveződésről szóló fejezet és az összetevőket lefedő teszt, aminek köszönhetően minden összetevő fejlettségéről, fejlődéséről részletes ismeretek kaphatók (lásd az 1–6. ábrát és a hozzájuk fűzött kommentárokat). A szabályozási (absztrakciós) szint kritériumainak megnevezésére különböző terminológia használatos. Ebben a tanulmányban a szenzo-motoros, szenzoros, szimbolikus, fogalmi megnevezések szerepelnek. A használhatóság, a begyakoroltság öt szintje értékelendő (az előkészítő, a kezdő, a haladó, a befejező és az optimális használhatóság szintje, 6. ábra). Ebben a tanulmányban vezetem be az első fejezet elemzése alapján az elsajátítás ötödik, a komplexitás szintjének kritériumait: elemi, egyszerű, összetett és komplex. A vizsgált kombinatív képesség tartóssági kritériuma: állandósult; kiépülési kritériuma: teljes lefedés; komplexitási kritériuma: elemi; absztrakciós kritériuma: szimbolikus; használhatósági kritériuma: optimum.

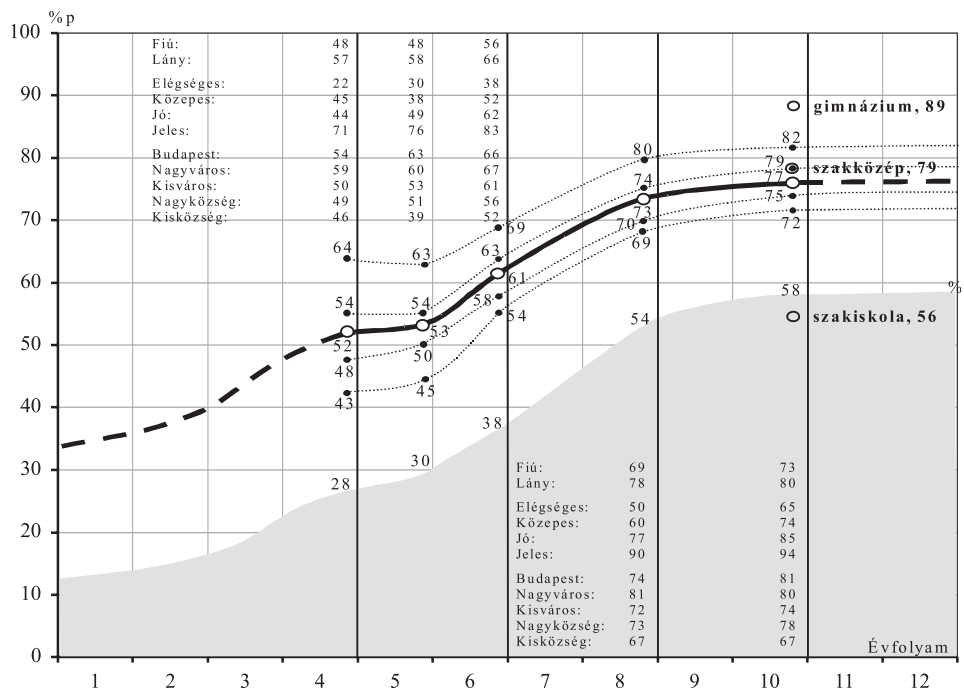
Az 1–4. ábra mutatja a négy elemi kombinatív készség, az 5. ábra pedig az elemi kombinatív képesség (vastag vonalak) és részkészségeinek (pontsorok) átlagos fejlődését százalékpontban kifejezve a 4. évfolyam végétől a 10. évfolyam végéig. A vastag szaggatott vonalak a becslült (extrapolált) fejlődést szemléltetik az 1–3. és a 11–12. évfolyamokon. A felmérés kétvétenkénti metszetekben történt. Kivételt képez ez alól az 5. évfolyam. Ezt azért iktattuk be, mert korábbi mérések szerint az 5. évfolyam körül az átlagos fejlődés görbéi átmenetileg ellaposodnak. (Csapó, 2003. 130–131.) A jelenség szembeeső mind az öt ábrán, ami megerősíti, hogy nem mérési hibáról van szó. Ettől az elteréstől függetlenül nyilvánvaló, hogy a fejlődést logisztikus görbe írja le. Az iskolába lépéskor az átlagos fejlettség az öt ábra szerint 20–40 százalékpont körüli, ami a 8. évfolyam végéig 60–80 százalékpont körüli szintre növekszik. Ezt követően a görbék ellaposodnak, a fejlődés leáll, vagyis az iskolából kilépők elemi kombinatív képességének átlagos fejlettsége 72–76 százalékpont körüli. (5. ábra) A magyar népesség nagy valószínűséggel ezen az átlagos szinten éli le az életét. A különbségek hihetetlenül nagyok. Ha a 10. évfolyam tanulóit iskolatípusonként vizsgáljuk, a gimnazisták átlagos fejlettsége 90, a szakközepeseké 75–85, a szakiskolásoké 37–64 százalékpont. (A szélsőséges egyéni különbségeket lásd később.) (1–2. ábra)

A négy készség nehézségi fokát, elsajátítási sorrendjét az 1. táblázatban olvasható adatok alapján már megismerhettük. Most a részkészségek elsajátításának nehézségi fokát vizsgáljuk meg. Azt láthatjuk, hogy ha az elemfajta minimális számát (itt betűfajta, B2) háromra növeljük, az elsajátítás lényegesen nehezebb, tovább tart. Tovább növeli a nehézséget, ha az összetétel elemszámának (itt a szó hosszának, S) megadott maximumánál rövidebb összetétel (szó) is képezhető. Áttekintve az öt ábrán a részkészségek fejlettségének nagymértékű függését az elemfajta és az összetétel-elemek számától, belátható, hogy mi történne, ha a betűk számát négyre, a szavak hosszát pedig háromra növelnénk, és az előző fejezetben ismertetett módszerrel kellene létrehozni az összetételrendszereket. A felmérés adatai is alátámasztják a szimbolikus szintű elemi kombinatív képesség megválasztott komplexitási körének helyességét, alkalmasságát.

A kritériumorientált diagnosztikus értékelés azt jelenti, hogy meghatározzuk a kritériumokat, és követjük azokat. Az állandósult tartósság kritériuma azt írja elő, hogy a mérésre ne lehessen felkészülni (az országos felmérés így történt), az absztrakciós és a komplexitási kritérium meghatározását és követését is ismertettem. A mérés adatai e kritériumok keretein belül érvényesek. A kiépülési kritérium a szóban forgó képesség, készség összetevőinek feltárását (erről szól az első fejezet) és olyan teszt kidolgozását köve-



1. ábra. Az ismétlés nélküli variálás fejlődése



2. ábra. Az ismétléses variálás fejlődése

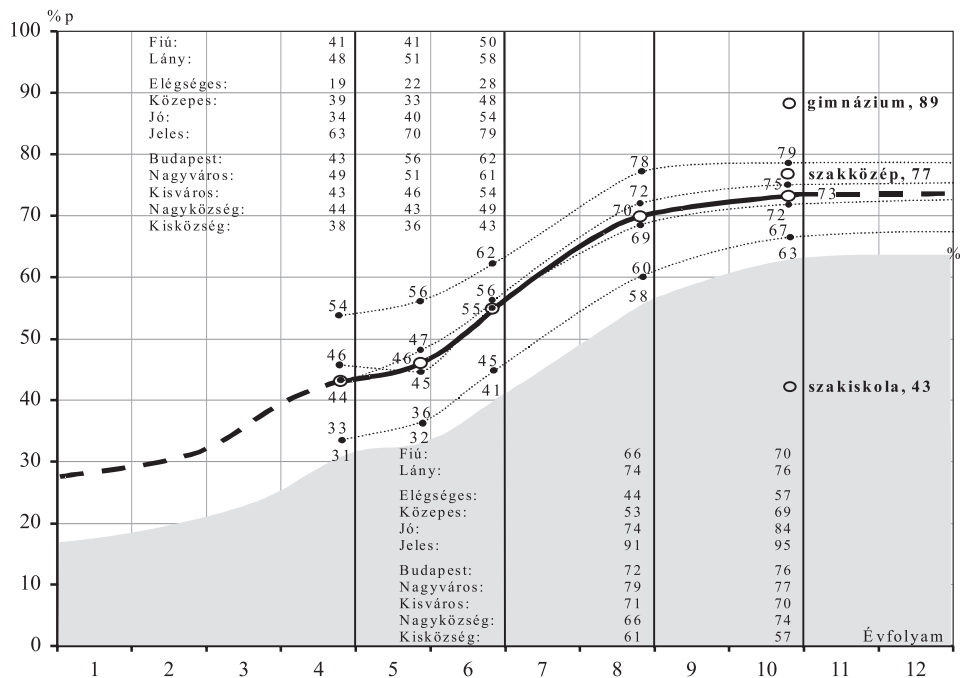
teli meg, amelynek feladatai, feladatelemei lefedik az összetevők teljes rendszerét (a második fejezetben olvasható az ennek megfelelő teszt). A kritériumorientált diagnosztikus mérés eredménye a használhatóság kritériumához viszonyítva mutatja a szóban forgó képesség, készség kiépültségének és begyakorlottságának szintjét, amit az eredményt jelző szokásos adatokon túl (a teszten elért nyerspont, százalékpont, a minta átlaga, szórása, eloszlása és hasonlók) három új mutató bevezetése tesz lehetővé (a 2. és a 3. új mutatót lásd később). Ezek a következők:

- az optimális használhatóságot (kiépültséget, begyakorlottságot) elérők aránya (ezt mutatja az 1–5. ábra tónusozott területe);
- az öt használhatósági (elsajátítási) szintet elérők aránya (6. ábra);
- a kiépülés és a begyakorlottság kritériumaihoz viszonyító egyéni fejlődési mutató (3. táblázat).

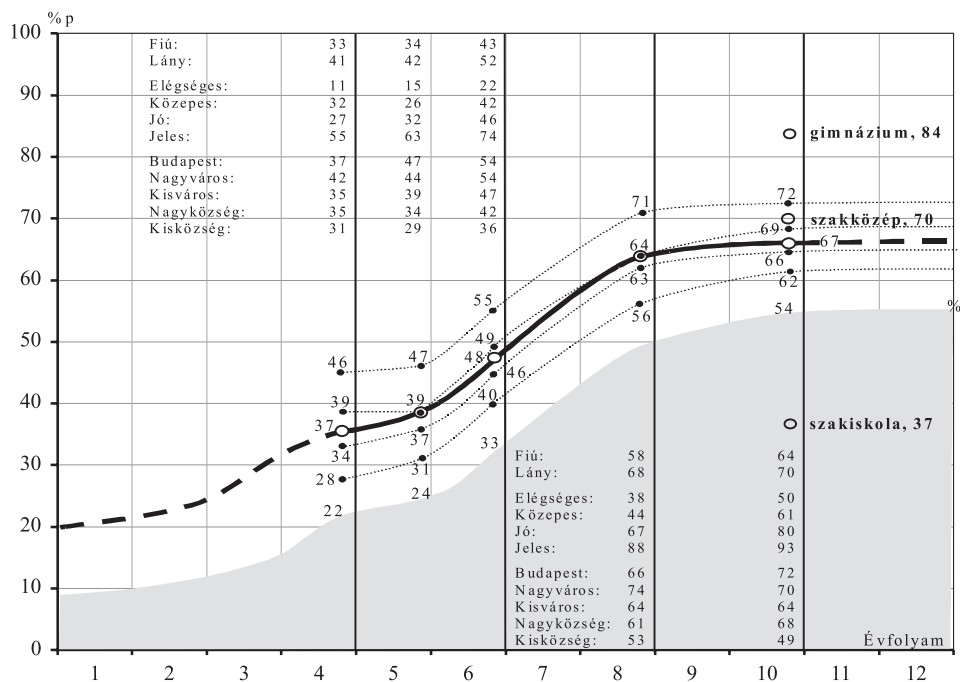
Az optimális használhatóság azt jelenti, hogy az összetevők elsajátítása és a begyakorlás befejeződött, de a reliabilitás értékétől, a komplexitás mértékétől és más (itt nem részletezhető) tényezőktől függő mennyiségű hiba megengedett. Esetünkben a 90–100 százalékpontos eredmény jelenti az optimális használhatóságot. Ez 16 pontos értékelés esetén legfőljebb két, 64 pontos esetén 6 feladatelem hibás megoldását engedi meg. Az elemi kombinatív képesség optimális használhatóságának adatai az 5. ábrán szerepelnek. Csak ehhez fűzök értelmező megjegyzést, az 1–4. ábra adatainak pedagógiai jelentősége ennek alapján becsülhető. A legkülönösebb tény, hogy már a negyedik évfolyam végén a tanulók 14 százalékában optimális szinten működik az elemi kombinatív képesség. Sőt az is feltételezhető, hogy az első évfolyamos tanulók között is akad néhány százaléknyi ilyen tanuló, de olvasáskészségük fejletlensége miatt az itt ismertetett teszttel ők nem mérhetőek. Ez azt jelenti, hogy a gyermekkor végéig a túlnyomó többség elvileg eljuthatna az optimális használhatóságig. Gyakorlatilag azonban (legalábbis belátható időn belül) ebben nem reménykedhetünk. Jelenleg ugyanis a 8. évfolyam végén csak a tanulók 41, a 10. évfolyam végén 47 százalékában működik optimális szinten az elemi kombinatív képesség, és ezt követően nincs fejlődés. E kiábrándító tények ellenére azt a hipotézist merem megfogalmazni, mely szerint a szándékos tartalomba ágyazott kritériumorientált képességfejlesztéssel (lásd Nagy, 2000c, 2003b, 2004) legalább a 8. évfolyam végéig elérhető lenne, hogy a túlnyomó többség eljusson az optimális használhatóság szintjére. Enélkül reménytelen a szükséges komplexitású gondolkodás kialakulása, a kombinatorikai alapismeretek eredményes tanítása. (3–4. ábra)

A tanulmányi eredmény és az elemi kombinatív képesség fejlettsége között rendkívül szoros az összefüggés. Az elégséges és a jeles tanulók közötti átlagos fejlettségbeli különbség a különböző évfolyamokon 24 és 43 százalékpontnyi különbséget mutat. Tekintettel arra, hogy a 4. évfolyam végétől a 8. évfolyam végéig az éves fejlődés 6 százalékpontnyi, az elégséges és jeles tanulók közötti fejlettségbeli különbség 4–6 évet tesz ki. Ez azt jelenti, hogy a tantervi tartalmak jeles szintű elsajátítása a tanulók túlnyomó többségében kialakítja az elemi kombinatív képesség optimális használhatóságát. Az eddigi tartalomorientált iskola azonban nem képes a szokásos aránynál több tanulónak jeles szinten megtanítani a tananyagot, amire törekedni egyébként értelmetlen, képtelen utópia lenne. A tartalomba ágyazott kritériumorientált fejlesztés arra vállalkozik, hogy a tananyag különböző szintű elsajátítása ellenére is optimális használhatóságúvá fejlessze a legalapvetőbb képességeket, készségeket. (5. ábra)

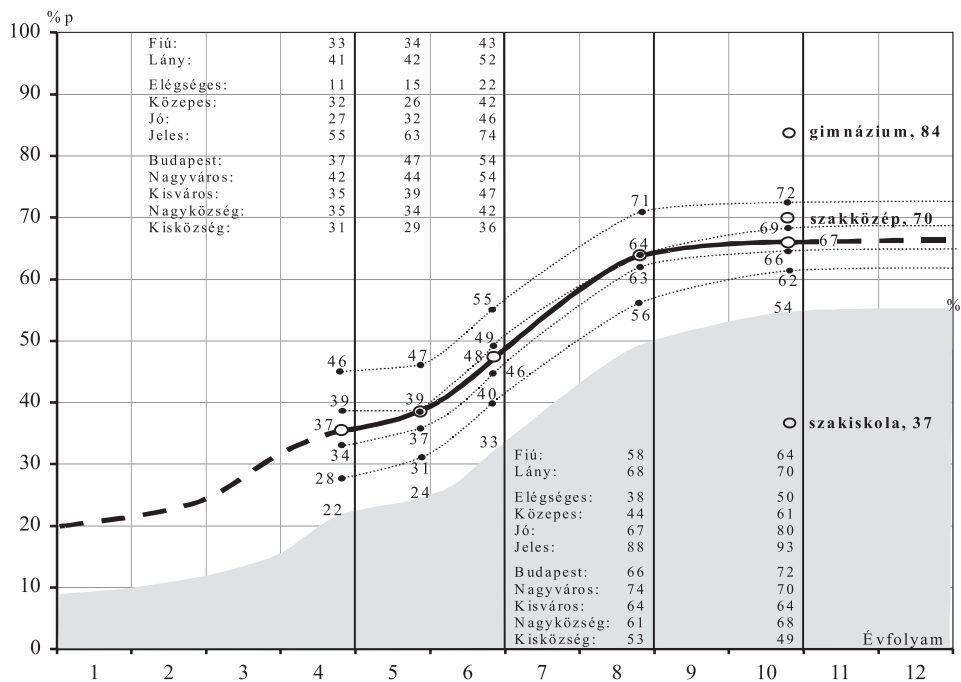
Figyelmet érdemel a nemek közötti különbség. Az általános iskola 4–8. évfolyamán a lányok elemi kombinatív képessége a fiúkénál másfél évvel fejlettebb. A tanulmányi eredményekben elért magasabb szintet a lányok szorgalmával szokás magyarázni. Nem hiszem, hogy a kombinatív képesség lényegesen magasabb fejlettsége pusztán a szorgalommal lenne magyarázható. A 10. évfolyam végén a lányok előnye „csak” egy év. Ennek a csökkenésnek sem az lehet a szokásnak megfelelő magyarázata, hogy a magasabb



3. ábra. Az ismétlés nélküli kombinálás fejlődése



4. ábra. Az ismétléses kombinálás fejlődése

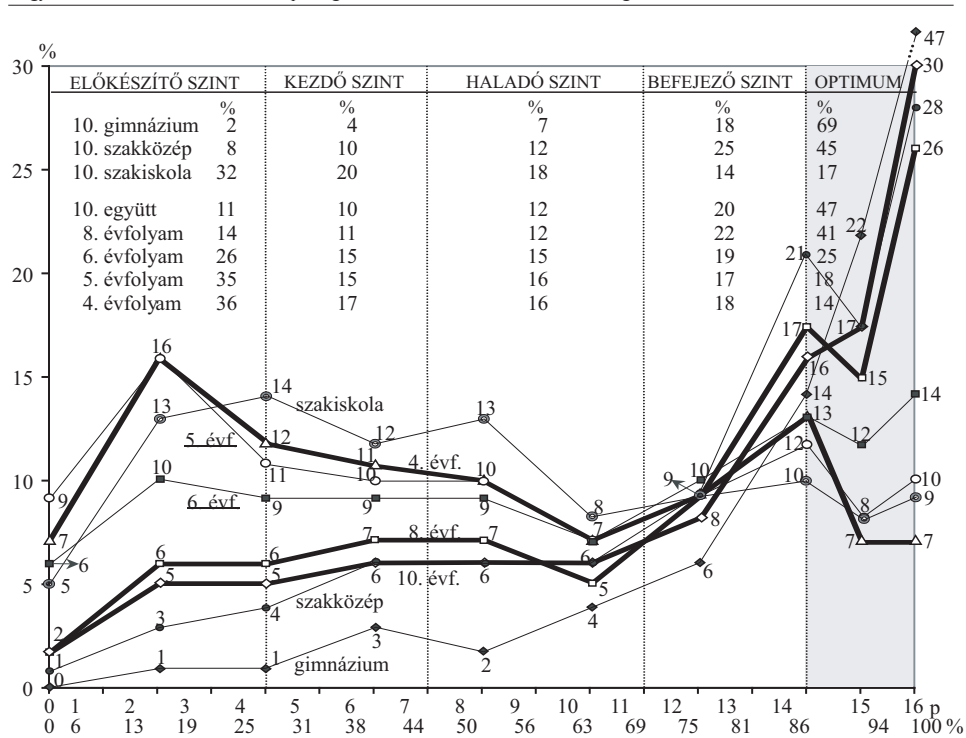


5. ábra. Az elemi kombinatív képesség fejlődése

évfolyamokon már megmutatkozik a fiúk előnye. Egyszerűen arról lehet szó, hogy a legkevesbé fejlett fiúk a 10. évfolyam végéig lemorzsolódnak, míg a lányokra kevésbé jellemző a tanulmányi eredmény és a motiválatlanság miatti lemorzsolódás. Mivel viszonylag bonyolult szabályokat kellett megérteni és követni, a lányok jobb verbalitása a valószínű magyarázat.

A kritériumorientált adatelemzés második új mutatója az egyének közötti különbségek eloszlásának elsajátítási szintekre bontása. Ennek az a pedagógiai funkciója, hogy ne csak azt tudjuk meg a tanuló eredménye alapján, hogy mekkora a távolság az optimum eléréséig, mekkora utat kell még bejárni, hanem azt is, hogy milyen jellegű az elért szint, milyen jellegűek a fejlesztési feladatok. Az előkészítő szinten lévő tanuló számára gyökeresen mások a tanulni valók (főleg az előfeltétel-tudás elsajátítása a feladat), mint például a haladó szinten. (6. ábra)

A vizsgált populációk egyedeinek különbségei alapján pedig azt is feltárhatjuk, hogy a különböző elsajátítási szintekhez a tanulók hány százaléka tartozik (lásd a 6. ábra felső részében található adatokat). A 6. ábra legszembetűnőbb üzenete a tanulók közötti szélsőségesen nagy különbség. A nagy különbségek minden mérés adataiban megjelennek, de itt egy igen egyszerű feladatsor megoldásáról van szó, amely a négy szempontú szabály megértését és követését várja el minimális, ezért átlátható mennyiségű elem felhasználásával. Az természetes, hogy a 4. évfolyamos tanulók 36 százaléka előkészítő, 17 százaléka kezdő, vagyis valamivel több, mint fele még nem tudja megoldani ezeket az egyszerű feladatokat. Az viszont már elfogadhatatlan, hogy a 10. évfolyam végén a szakiskolások több, mint fele reked meg az előkészítő és kezdő szinten. Ez nem öröklött adottság kérdése, az ilyen egyszerű komplexitású feladatok megoldásának képessége minden ép tanulóban kifejleszhető. A kudarc oka a hagyományos tartalom- és normaorientált iskola lehet. A másik végletet a gimnazisták képviselik. Igaz, hogy a 10. évfolyam



6. ábra. Az elemi kombinatív képesség fejlődésbeli különbségeinek alakulása

3. táblázat. Az elemi kombinatív képesség egyéni fejlődési mutatója. [Értékelés: ✓=működik vagy ?=még nem működik. I=ismétléses; IN=ismétlés nélküli; V=variálás; K=kombinálás; B=betűfajta száma; C=a szavak (összetételek) hossza (elemszáma); p = az elért pontok (pipák) száma, alatta a %-os eredmény. Az egymás alatti két szám bekarikázandó.)

| Sorszám                    | 1.     | 2.       | 3.       | 4.     | 5.       | 6.       | 7.     | 8.     | 9.       | 10.    | 11.      | 12.      | 13.    | 14.    | 15.      | 16.    |
|----------------------------|--------|----------|----------|--------|----------|----------|--------|--------|----------|--------|----------|----------|--------|--------|----------|--------|
| Készség                    | INV    | IK       | IV       | INV    | INK      | INV      | INK    | IV     | INV      | IV     | IK       | INK      | IK     | INK    | IV       | IK     |
| Részkesz-<br>év hó-<br>ség | B3, S2 | B2, SI-2 | B2, SI-2 | B2, S2 | B3, SI-2 | B3, SI-2 | B3, S2 | B2, S2 | B2, SI-2 | B3, S2 | B3, SI-2 | B3, SI-2 | B2, S2 | B2, S2 | B3, SI-2 | B3, S2 |
| 2003 05                    | ?      | ?        | ✓        | ✓      | ?        | ✓        | ?      | ✓      | ✓        | ?      | ?        | ?        | ?      | ?      | ✓        | ?      |
| 2003 05                    | ✓      | ✓        | ✓        | ?      | ?        | ?        | ?      | ✓      | ✓        | ?      | ?        | ✓        | ✓      | ✓      | ?        | ?      |
| 2003 05                    | ✓      | ?        | ?        | ✓      | ?        | ?        | ?      | ✓      | ✓        | ✓      | ?        | ✓        | ✓      | ✓      | ✓        | ?      |
| 2003 05                    | ✓      | ✓        | ✓        | ✓      | ✓        | ✓        | ✓      | ✓      | ?        | ?      | ?        | ✓        | ✓      | ✓      | ?        | ✓      |

| Előkészítő szint |   |   |    |    | Kezdő szint |    |    | Haladó szint |    |    |    | Befejező szint |    | Optimum |    |    |     |
|------------------|---|---|----|----|-------------|----|----|--------------|----|----|----|----------------|----|---------|----|----|-----|
| p =              | 0 | 1 | 2  | 3  | 4           | 5  | 6  | 7            | 8  | 9  | 10 | 11             | 12 | 13      | 14 | 15 | 16  |
| % =              | 0 | 6 | 13 | 19 | 25          | 31 | 38 | 44           | 50 | 56 | 63 | 69             | 75 | 81      | 86 | 94 | 100 |

végén 47 százalékuk 100 százalékos megoldást adott, 69 százalékukban optimális szinten működik ez az elemi képesség. Ugyanakkor 18 százalékuk csak 70–89 százalékpon-  
tos megoldásra képes, és 13 százalékuk ennél is kevesebbre.

További elemzés nélkül is megfogalmazható a következtetés, mely szerint az évfolya-  
mokat átívelő folyamatos, kritériumorientált készség- és képességfejlesztés nélkül nem  
remélhető a legalapvetőbb képességek optimális használatának elsajátítása. Vonatkozik  
ez nemcsak azokra az alapvető készségekre és képességekre, amelyekről a pedagógiai



gyakorlatnak tudomása is alig van, ezért nem is képezhetik a fejlesztés tárgyát, hanem azokra is, amelyek kialakítása alapvető feladatként van előírva (hogy csak a legismertebbet, a legfájóbbat, az olvasásképeséget említsem).

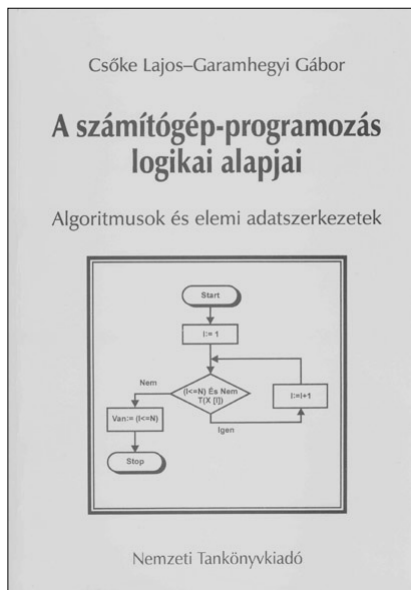
A alapvető képességek és készségek tanéveken átívelő kritériumorientált fejlesztésének nélkülözhetetlen eszköze az egyes tanulók elsajátítási folyamatainak nyomon követése. Ezt a célt szolgálja a kritériumorientált fejlesztés harmadik új mutatója: az egyéni fejlődési mutató. (3. táblázat)

Az egyéni fejlődési mutató tartalmazza a négy elemi készség és a 16 rész-készség adatait. Amelyik rész-készség már működik a mérés időpontjában, azt pipa (✓), amelyik még nem működik, amelyiket még fejleszteni kell, azt kérdőjel (?) mutatja. Ennek segítségével részletes diagnosztikus térkép áll rendelkezésünkre, amely azt is jelzi, hogy milyen szinten van a tanuló, milyen utat kell még bejárni, az optimális használhatóság eléréséig mit kell még tenni. (Évenkénti egyéni longitudinális mérési adatokkal még nem rendelkezünk, ezért nem egy tanuló éveként változó adatai szerepelnek a 3. táblázatban, hanem egy-egy átlagos fejlettségű 4., 6., 8. és 10. évfolyamos tanuló 2003-ban felmért adatai, amelyek egy átlagos képzeletbeli tanuló négyéves fejlődését szemléltetik.)

## Irodalom

- Barratt, B. B. (1975): Training and transfer in combinatorial problem solving. The development of formal reasoning during early adolescence. *Developmental Psychology*, 11. 700–704.
- Csapó Benő (1979): A kombinatív képesség és értékelésének feltételei. *Acta Univ. Szeged de A. J. nom. Sectio Paed. Et Psych. Ser. Spec. Pead.*, Szeged.
- Csapó Benő (1983a): A kombinatív képesség és műveleinek vizsgálata 14 éves tanulóknál. *Magyar Pedagógia*, 1. 31–50.
- Csapó Benő (1983b): A kombinatív képesség bonyolult rendszerként való leírásának stratégiája. *Acta Univ. Szeged de A. J. nom. Sectio Paed. Et Psych.* 25. 97–113.
- Csapó Benő (1985a): Untersuchung der kombinatorischen Fähigkeiten und ihrer Operationen bei 14-jährigen Kindern. In: Henning, H. J. – Günther, P. K. G. (szerk.): Casual and soft modeling (Ergebnissband der 2. Bremer Methoden-konferenz, 1984) *Bremer Beiträge zur Psychologie*, 43. 29–75.
- Csapó Benő (1985b): A kombinatív képesség fejlődését befolyásoló tényezők. *Acta Univ. Szeged de A. J. nom. Sectio Paed. Et Psych.* 65–87.
- Csapó Benő (1985c): A struktúra és a tartalom szerepének vizsgálata izomorf kombinatorikai feladatokban. *Magyar Pszichológiai Szemle*, 1. 19–34.
- Csapó Benő (1987): A kombinatív képesség fejlesztése az általános iskolában. *Pedagógiai Szemle*, 9. 844–853.
- Csapó Benő (1988): *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Csapó Benő (2001): A kombinatív képesség fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*, 101. 4. 511–530.
- Csapó Benő (2003): *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Fischbein, E. – Pampu, I. – Minzat, I. (1970): Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *British Journal of Educational Psychology*, 40. 261–270.
- Furka Árpád (1982): *Tanulmány a gyógyászatilag hasznosítható peptidok szisztematikusságának lehetőségéről*. <http://szerves.chem.elte.hu/Furka/82Magya5Htm1.htm>
- Gyapjas Ferenc (1972): *A kombinatorika és a valószínűségszámítás tanításának módszertana*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Henriques, J. – Christophides, A. – Moreau, A. (1974): Quelques données nouvelles sur les opérations combinatoires et la pensée formelle. *Cahiers de Psychologie*, 17. 55–64.
- Inhelder, B. – Piaget, J. (1958, magyarul 1967): *A gyermek logikájától az ifjú logikáig*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Kishita, M. A. (1979): Proportional and combinatorial reasoning in two cultures. *Journal of Research in Science Teaching*, 5. 439–443.
- Lénárd Ferenc (1978): *A problémamegoldó gondolkodás*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Lénárd Ferenc (1982): *Az absztrakció kialakítása kisiskolás korban*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Lovász László: <http://www.cs.elte.hu/~lovasz/>
- Lovász László – Vesztergombi Katalin – Pelikán József (1971): *Kombinatorika az általános és középiskolai matematika szakkörök számára*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Miller, G. A. (1956): The magical number seven: Plus or minus two: Some limits on our capacity for process-

- ing information. *The Psychological Review*, 63. 81–97.
- Nagy József (2000a): *XXI. század és nevelés*. Osiris Kiadó, Budapest.
- Nagy József (2000b): Összefüggés-megértés. *Magyar Pedagógia*, 100. 2. 141–185.
- Nagy József (2000c): A kritikus készségek és képességek kritériumorientált fejlesztése. *Új Pedagógiai Szemle*, 7–8. 255–226.
- Nagy József (2003a): Knowledge-based society and education: The problem of time. *Early Childhood Research*, 1. 7–19.
- Nagy József (2003b): Az eredményesebb képességfejlesztés feltételeiről. *Iskolakultúra*, 8. 40–52.
- Nagy József (2003c): A rendszerező képesség fejlődésnek kritériumorientált feltárása. *Magyar Pedagógia*, 103. 3. 269–314.
- Nagy József (2004): Olvasástanítás: a megoldás stratégiai kérdései. *Iskolakultúra*, 3. 3–26.
- Nagy József – Fazekasné Fenyvesi Margit – Józsa Krisztián – Vidákovich Tibor (2002a): *Diagnosztikus fejlődésvizsgáló rendszer 4–9 évesek számára*. OKÉV, KÁOKSZI, Budapest.
- Nagy József – Fazekasné Fenyvesi Margit – Józsa Krisztián – Vidákovich Tibor (2002b): *Az alapkészségek fejlődése 4–8 éves életkorban*. OKÉV, KÁOKSZI, Budapest.
- Nagy József – Fazekasné Fenyvesi Margit – Józsa Krisztián – Vidákovich Tibor (2004): *DIFER Programcsomag: Diagnosztikus fejlődésvizsgáló és kritériumorientált fejlesztő rendszer 4–8 évesek számára*. Mozaik Kiadó, Szeged.
- Piaget, J. – Inhelder, B. (1951): *La genese de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France, Paris.
- Schön István (1999): *A kombinatorikus kémiától a kombinatív gondolkodásig*. <http://peptid.chem.elte.hu/RG/kozl/rh1.htm>
- Roberge, J. J. (1976): Developmental analyses of two formal operational structures: Combinatorial thinking and conditional reasoning. *Developmental Psychology*, 6. 563–564.
- Scardamalia, M. (1977): Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks. *Child Development*, 48. 28–37.
- Varga Tamás (1967): *Combinatorials and probability for young children*. Part 1. Scherbrooke, The International Study Group for Mathematics Learning.



A Nemzeti Tankönyvkiadó könyveiből