Iskolakultúra 2002/12

Schweitzer, P. (1994): Many Happy Retirements. In: Schutzman, M. – Cohen-Cruz, J. (eds.): *Playing Boal*. Routledge, London. 64–80.
Thompson, J. (1999): *Drama Workshops for Anger Management and Offending Behaviour.* Jessica Kingsley Publishers, London.
Sz. Pallai, Á. (2001): *Skills Development through Forum Theatre Methodology.* Unpublished MPhil Thesis, University of Strathclyde, Glasgow.
Vine, C. (1993): TIE and the Theatre of the Oppressed. In: Jackson, T. (ed.): *Learning through Theatre*. Routledge, London. (Second edition) 109–130.

Sz. Pallai Ágnes

Nem euklideszi geometriák az iskolában

Középiskolás koromban időnként hallottam matematika órán tanárnőmtől „az euklideszi síkon.....”, „az euklideszi geometriában....” kifejezéseket, és soha nem értettem, hogy miért teszi oda néha a tanárnő az euklideszi jelzőt a geometria szó elé, mikor egy pont, egy szakasz, egy egyenes mindig egy pont, egy szakasz, egy egyenes. Aztán a Sopronban 1996 nyarán megrendezett Rátz László vándorgyűlésen egy előadás a Bolyai-féle geometriát mutatta be a Poincaré-féle körmodellen. Ott körvonalazódott előttem, hogy létezik más, logikusan felépített geometria. Ezeknek az élményeknek a hatására többen is érdeklődni kezdtünk a nem euklideszi geometria iránt. Így lett ez a dolgozat három különböző geometria összehasonlítása oly módon, hogy az a matematikát alig kedvelők körében is érthető és érdekes legyen.

Miért jó tanítani más, a megszokott euklideszitől különböző geometriát is? Nos, e mellett rengeteg érv szól, néhányat mégis hadd említsünk meg:

– a többféle szempontból való vizsgálódás fejleszti az emberek közti megértést. A gyermek képes lesz kilépni egy zárt világból, gondolkodásmódból, könnyebben meg fogja érteni a másik ember gondolatait;

– a gyerekek példát látnak többféle axiómarendszerre, s arra, hogy ezek mindegyikére egy logikailag helyes, ellentmondásmentes elmélet építhető fel, így későbben könnyebben el tudják majd fogadni azt is, hogy más területen más axiómákra építünk;

– a többféle geometria összehasonlítása jobban rögzíti a fogalmakat, tételeket, illetve a bizonyítási igényt is mélyíti. A különbségek az egyes geometriák között lehetőséget adnak sok-sok „miért” kérdés feltevésére: miért van az, hogy egyes tételek, melyeket a diákok elfogadnak a síkban, másképp viselkednek a gömbön vagy a hiperbolikus geometriában, miért bizonyosak a diákok e tételek helyességét illetően a síkban, melyek voltak a bizonyítás mögött rejlő feltevések;

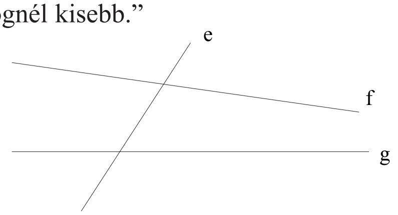
– ezek a modellek arra is alkalmasak, hogy segítségükkel az abszolút geometria fogalmait, tételeit kissé más megvilágításba helyezzük azzal, hogy a szokásostól eltérő módon szemléltetjük őket.

A nagy felfedezés

A matematikai bizonyítás az ókori görög matematikában jelenik meg először. A görögök jutottak el először arra a gondolatra, hogy egy-egy matematikai állítás helyességét úgy lehet legjobban alátámasztani, ha megmutatjuk: logikailag szükségszerű következménye más, egyszerűbb és már ismert állításoknak. Így a bonyolultabb tételeket lépésről lépésre egyszerűbbekre vezetjük vissza. Ez a folyamat azonban nem folytatható korlátlanul; egyszer elérkezünk olyan egyszerű állításokhoz, amelyeket nem tudunk még egyszerűbbekre visszavezetni, helyességüket (éppen egyszerűségük miatt) közvetlenül elfogadjuk. Euklidesz ‚Elemek' című könyvében az egész geometriát így vezeti vissza néhány alapfogalomra (pont, egyenes, sík) és alaptételre (axiómára).

Euklidesz kb. i.e. 325 körül megjelent műve volt 2000 évig a példaképe a logikai következtetésekkel felépített tudományos tárgyalásnak. Euklidesz kritikája az ókortól a 19. századig abban állt csupán, hogy egyik axiómáját – a párhuzamos egyenesekről szólót – viszonylagos bonyolultsága miatt nem akarták axiómaként elfogadni, hanem vissza akarták vezetni a többi axiómára. Az Euklidesz által megfogalmazott párhuzamossági axióma így szól:

„Ha egy egyenes másik kettőt úgy metsz, hogy a metsző egyenes ugyanazon oldalán belül keletkező két szög összege a derékszög kétszeresénél kisebb, akkor a két egyenes határtalanul meghosszabbítva azon az oldalon találkozik, amelyik oldalon az a két szög van, amelynek összege két derékszögnél kisebb."



1. ábra

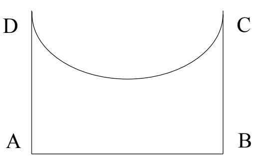
Proklosz az V. században az általunk ismert axiómával helyettesítette Euklidesz párhuzamossági axiómáját:

„Ha egy síkban adott egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor ebben a síkban csak egy olyan egyenes van, amely a megadott ponton áthalad, és a megadott ponton át nem haladó, megadott egyenest nem metszi."

Tehát ezt a kijelentést illetően a matematikával foglalkozók azt próbálták belátni, hogy nem axióma, hanem a többi axióma segítségével – mint egy tétel – belátható. Az ilyen bizonyítási kísérletek legígéretesebb csoportja úgy alakult, hogy feltették a párhuzamosság axiómájának helytelen voltát, ebből a feltevésből logikai következtetésekkel újabb és újabb állításokat vezettek le, és közben igyekeztek ellentmondásra jutni a többi axiómával szemben (jól ismert bizonyítási módszer a reductio ad absurdum a matematikában). Ez azonban sohasem sikerült. Nem is sikerülhetett, hiszen az állítás nem igaz. Mégpedig azért nem, mert a párhuzamossági axióma független a többi axiómától, tehát azok segítségével nem bizonyítható sem az, sem az ellenkezője.

A többféle geometria összehasonlítása jobban rögzíti a fogalmakat, tételeket, illetve a bizonyítási igényt is mélyíti. A különbségek az egyes geometriák között lehetőséget adnak sok-sok „miért" kérdés feltevésére: miért van az, hogy egyes tételek, melyeket a diákok elfogadnak a síkban, másképp viselkednek a gömbön, vagy a hiperbolikus geometriában, miért bizonyosak a diákok e tételek helyességét illetően a síkban, melyek voltak a bizonyítás mögött rejlő feltevések

Rengeteg matematikus foglalkozott a „2000 éves problémával". Így például *Saccheri* 1700 körül a következő helyettes axiómát szerepeltette: „Van legalább egy háromszög, amelyben a szögek összege két derékszöggel egyenlő." Ő foglalkozott az ún. Saccheri-féle négyszöggel, vagyis az olyan ABCD négyszöggel, melyben A és B csúcsoknál derékszög van és AD = BC. Azt akarta bizonyítani, hogy D és C csúcsoknál is derékszög van.



2. ábra

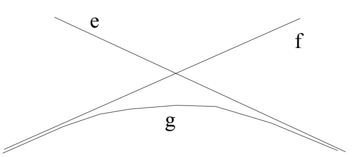
Lambert vizsgálataiban szerepelt egy olyan négyszög, amelynek három szöge derékszög (Lambert – féle négyszög), és azt vizsgálta, hogy mekkora ennek a négyszögnek a negyedik szöge.

Bolyai Farkas is foglalkozott a párhuzamosok problémájával. Az ő helyettes axiómája: „Három pont körön vagy egyenesen van."

A mindössze 21 éves *Bolyai János* (1802–1860) és tőle függetlenül az orosz *Ny. I. Lobacsevszkij* (1792–1856) olyan geometriát konstruáltak, amelyben a párhuzamossági posztulátum nem érvényes. Más szóval a geometriai állítások ellentmondásmentes rendszerét szerkesztették meg egy olyan axiómarendszerből, amelyben a párhuzamossági axiómát az ellenkezőjével helyettesítették, vagyis azzal, hogy egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át egynél több (és így végtelen sok) olyan egyenes húzható, amelynek nincs közös pontja az adott egyenessel. Az ilyen rendszert Bolyai-Lobacsevszkij féle geometriának vagy hiperbolikus geometriának nevezzük. Ezért tartják a matematikusok Bolyai és Lobacsevszkij legnagyobb érdemének azt, hogy ők állították először a tudományt a geometriák közötti válaszút elé.

Bolyai János az ‚Appendix'-ben a párhuzamos új, az euklideszinél általánosabb fogalmát a következőképpen értelmezte:

„Egy adott egyenesen kívül levő ponton át húzzunk egy másik, az előbbit metsző egyenest. Ebből a kiinduló helyzetből, a választott pont körül – mindvégig a közös síkban maradva – kezdjük el az egyenest az óramutató járásával ellentétes irányba forgatni. Ekkor szükségszerűen bekövetkezik egy olyan helyzet, amikor a forgatott egyenes legelőször nem metszi a rögzítve hagyottat. A pont körüli forgatás révén ilyen állásba került határegyenesről mondjuk azt, hogy párhuzamos a vele egy síkban levő másik egyenessel."



3. ábra

Ebben a felfogásban a metsző egyenesek között lehetetlen, hogy utolsó létezzék, a határfélegyenes viszont az első olyan, amely nem metsző, vagyis párhuzamos. A nem metszők közé tartozik az euklideszi értelemben vett párhuzamos is.

Tehát a Bolyai-geometria (hiperbolikus geometria) axiómarendszerét az euklideszi geometria axiómarendszeréből kaphatjuk meg oly módon, hogy elhagyjuk belőle az (euklideszi) párhuzamossági axiómát, és helyette az alábbi hiperbolikus párhuzamossági axiómát iktatjuk be:

Ha egy síkban adott egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor ebben a síkban a ponthoz illeszkedő egyenesek között van két olyan, amely nem metszi az adott egyenest.

Az euklideszi és a hiperbolikus párhuzamossági axióma nyilván egymás tagadásai, hiszen ha igaz a hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómája, akkor az adott ponton át végtelen sok egyenes létezik, amely nem metszi az adott egyenest, ellentétben az euklideszi geometria párhuzamossági axiómájának állításával, mely szerint csak egy olyan egyenes létezik, mely az adott egyenest nem metszi.

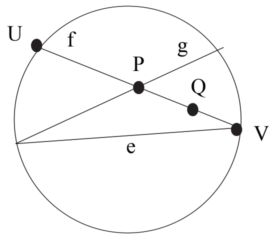
Arról, hogy a nem euklideszi geometria valóban ellentmondás nélküli, felfedezői ugyan meg voltak győződve, de bizonyítani nem tudták. Bolyai János feljegyzéseiből tudjuk, hogy érezte ilyen bizonyítás szükséges voltát. Maga a bizonyítás azonban még évtizedekig váratott magára, a 19. század második felében azonban többen is, köztük *Felix Klein*, megtalálták a bizonyítás módját, mégpedig az úgynevezett modell-módszerben.

Ennek lényege az, hogy a geometria rendszerének axiomatikus tárgyalásában az alapfogalmak tulajdonságaiból mindig csak annyit szabad felhasználni, amennyi az axiómákból kiolvasható. Ezért az alapfogalmak szemléletes tartalmától el lehet és el is kell tekinteni, más szóval az axiómarendszer egy modelljének kell tekinteni bármilyen rendszert, melyben az axiómák kifejezte állítások teljesülnek.

Beltrami 1868-ban bebizonyította, hogy a sík egy korlátos részén belül okoskodva a hiperbolikus geometriában nincs ellentmondás, ha az euklideszi geometria ellentmondásmentes. Állítása bizonyításánál felhasználta a traktrixot. A traktrix (vonszolási görbe) egy olyan síkgörbe, amelynek bármely pontjában vont érintőnek x tengelyig terjedő szakasza állandó. Ha ezt a görbét az x tengely körül megforgatjuk, akkor egy felületet kapunk. Az euklideszi geometria minden egyes axiómája, a párhuzamossági axióma kivételével, teljesül ezen a forgásfelületen. Ez az úgynevezett Beltrami-féle modell bizonyítja Beltrami állítását.

1871-ben Felix Klein adott egy modellt, *Cayley* egyik dolgozatából merített ötlet alapján. Ezt a modellt Cayley–Klein féle modellnek nevezzük. Ez a modell bizonyítja a hiperbolikus geometria ellentmondás-mentességét (feltéve, hogy az euklideszi is az). A modell a következő: legyen a tér egy gömb belseje, tehát a pontok a gömb belső pontjai. Legyen a sík a gömböt metsző sík gömbön belüli része, azaz a gömbből kimetszett körlemez belső pontjai, az egyenes a körlemez húrjainak belső pontjai és a szakasz olyan szakasz, amelynek mindegyik végpontja a gömbnek belső pontja. Félegyenesen olyan félegyenesnek gömbön belüli részét értjük, amelynek a kezdőpontja is a gömbön belül van.

A most értelmezett mesterséges geometriában, modellben nem teljesül a párhuzamossági axióma. Ha a P pont nem illeszkedik az e egyenesre, akkor síkjukban P-re végtelen sok e-t nem metsző egyenes illeszthető. De a Cayley-Klein féle modellben a maradék axiómarendszer teljesül.



4. ábra

A párhuzamosság kérdésére adhatunk olyan választ is, miszerint nincsenek egy síkban fekvő, egymást nem metsző egyenesek, ez azonban ellentmond a maradék axiómarendszernek. Arra a kijelentésre, hogy bármely két, egy síkban fekvő egyenes metsző, felépíthető az elliptikus geometria (mivel a maradék axiómarendszerből levezethető, hogy a sík egy adott egyenesére merőleges egyenesek nem metszik egymást, így vannak egy síkban fekvő, egymást nem metsző egyenesek. Ezért az abszolút geometriában a következő állítás igaz: ha adott egy egyenes, és egy rá nem illeszkedő pont, akkor a pont és az egyenes síkjában az adott ponton át az adott egyenessel legalább egy párhuzamos húzható). Az elliptikus geometriában például az egyenes zárt vonal, így nem értelmezhető például a félegyenes fogalma.

A geometriák megkülönböztetésére használt hiperbolikus, elliptikus, parabolikus elnevezések Felix Kleintől származnak. Parabolikus geometrián az euklideszi geometria értendő (a hiány neve görögül élleipszisz, a többleté hüperbolé, az egyenlőségé parabolé). Analóg módon ezt értelmezhetjük úgy is, hogy nincs, több, illetve egy párhuzamos van a vonatkozó geometriákban.

Azt pedig, hogy az euklideszi geometria ellentmondásmentes, 1898-ban megjelent ‚A geometria alapjai' című könyvében *Hilbert* bebizonyította. Ehhez Hilbertnek két dolgot kellett megtennie. Először is 2000 évvel Euklidesz után pontosan meg kellett fogalmaznia az euklideszi geometria axiómáit. Ezt maga Euklidesz nem tette meg, és utána mások sem, egészen Hilbertig. Például Euklidesznél hiányoznak az olyan axiómák, amelyek az egyenesen vagy a síkon a pontok elrendezését írják le (azt, hogy egy egyenes a síkot két félsíkra bontja stb.). Hilbert előtt az ilyen jellegű megfontolásokra mindig a szemléletet kellett segítségül hívni. Hilbert összeállított egy axiómarendszert, és megmutatta, hogy ebből tisztán logikai következtetésekkel le lehet vezetni az euklideszi geometria megszokott tételeit.

Ezek után bebizonyította az axiómarendszerének ellentmondás-mentességét, mégpedig a modell-módszer segítségével:

az euklideszi geometria számára kellett modellt készíteni. Hilbert ezt is megtette, mégpedig az alapgondolatot a *Descartes* óta ismert analitikus geometriából merítette. Ahogy ott a pontokat valós számokból álló számpárokkal jellemzik, a Hilbert-féle modellben éppen a valós számpárok jelentik a pontokat. Ebből tehát látszik, hogy az euklideszi geometria ellentmondástalan, ha az aritmetika (azaz a valós számok elmélete) nem vezet ellentmondásra.

A valós számok axiómarendszere ellentmondásmentes, ha a halmazelmélet szokásos axiómarendszere ellentmondásmentes, ez azonban még nincs bizonyítva. Tehát a geometriában relatív ellentmondás-mentességről lehet beszélni.

A „mi" geometriánk

A párhuzamosság szempontjából vizsgálódva három irányba indulhatunk el és vizsgálódhatunk. Az iskolai oktatásra vonatkozó elképzeléseinkben megjelenik mindhárom geometria.

A maradék axiómarendszerből levezethető, hogy ha egy síkban adott egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor ebben a síkban létezik legalább egy olyan egyenes, amely a megadott ponton áthalad, és a megadott ponton át nem haladó, megadott egyenest nem metszi.

Ez fogja adni az első két irányt.

Az első irány: ha egy síkban adott egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor ebben a síkban csak egy olyan egyenes van, amely a megadott ponton áthalad, és a megadott ponton át nem haladó, megadott egyenest nem metszi. Ez az euklideszi (parabolikus) párhuzamossági axióma, amit már oly jól ismerünk.

A második irány a Bólyai, illetve Lobacsevszkij által felfedezett geometria, mégpedig a hiperbolikus geometria. A hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómája tehát így szól:

– ha egy síkban adott egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor ebben a síkban van két olyan egyenes, amely a megadott ponton áthalad, és a megadott ponton át nem haladó, megadott egyenest nem metszi. Ebből levezethető, hogy ha kettő létezik, akkor létezik végtelen sok.

A harmadik irány pedig a párhuzamosság kérdésére adható harmadik válaszból adódik, miszerint nincsenek párhuzamos egyenesek, azaz:

– bárhogy adunk meg egy egyenest és rajta kívül egy pontot, nem tudunk a megadott ponton áthaladó és a megadott egyenest nem metsző egyenest húzni. Azt a geometriát, amelyben ez az állítás teljesül, elliptikus geometriának nevezzük.

Az utóbbi két irány attól izgalmas, hogy szokatlan, meglepő dolgokat rejt.

Ezen a három irányon szeretnénk mi is elindulni, s néhány alapvető dolgot megnézni az egyes geometriákban.

A parabolikus (euklideszi) geometriát a hagyományos értelemben vett síkon vizsgáltuk eddigi tanulmányaink során, most is ezekhez az ismeretekhez fogunk fordulni, így ez csak az összehasonlítás szempontjából lesz érdekes és nem az újdonságok miatt. Az elliptikus geometria modellje a gömb lesz, a hiperbolikus geometria szép modellje a Poincaré-féle körmodell (P-modell). A P-modellen éppúgy lehet szerkeszteni és számolni, mint az euklideszi síkon, de ennek elvégzése hosszadalmas. Néhány éve *Szilassi Lajos* főiskolai tanár elkészítette ennek számítógépes programját, amely megkímél minket a technikai bonyodalmaktól, segítségével szemléletesen vizsgálhatjuk e geometria sajátosságait.

A különböző geometriák összehasonlítását két gondolatkör köré építjük: nem metsző egyenesek száma; a háromszög szögösszege.

A gömb

– A sík a gömbfelület, az egyenesnek megfelelő főkör véges, két középpontja van. Egyetlen főkör van, amely adott pontpáron áthalad, kivéve, ha azok nem átellenes pontok.

– Egy főkör íve a legrövidebb út két gömbi pont között, ez a gömbi szakasz. Két pont közötti távolságot az őket összekötő főkör mentén mérjük. A távolságot itt fokban mérjük. Két távolságot tudunk így mérni, és tőlünk függ, melyiket nevezzük a két pont távolságának. Általában a rövidebbet szokták távolságnak nevezni. Létezik két pont között legnagyobb távolság, mégpedig a 180 fok. A gömbön a távolságot is, a szöget is fokban mérjük, tehát gömbi vonalzónkat nemcsak gömbi távolság, hanem gömbi szög mérésére is használjuk.

– Tetszőleges két főkör mindig metszi egymást, mégpedig két pontban, nincsenek tehát nem metsző egyenesek.

– A lehetséges „legnagyobb” – elfajuló – háromszög csúcsai egy főkörön vannak, és mindegyik szöge 180 fokos. Ez a háromszög beteríti a gömb felét. Ennek a háromszögnek a szögösszege 540 fok. A lehetséges „legkisebb” háromszög csúcsai szintén egy főkörön vannak. Képzeljük el úgy, hogy egy valós gömbháromszög összelapul. Ekkor a két szélső szög a nullához, a középső pedig a 180 fokhoz tart. Ennek az elfajuló háromszögnek a szögösszege 180 fok.

– A gömbön nincsen hasonlóság, a háromszögek egybevágósági alapesetei: ooo, sss, oso, sos közül az sso és az oos esetek nem teljesülnek.

– A gömbön a területet is fokban mérjük, a gömbi excesszussal.

A Poincaré-féle körmodell

– A síknak egy nyitott körlap felel meg, tehát nem tartoznak a síkhoz a körvonal pontjai. Ez a kör az alapkör. A pontok az alapkör belsejébe eső pontok, az egyenesek az alapkörre merőleges köröknek az alapkör belsejébe eső íve, illetve az alapkör átmérői lesznek.

– Két egyenes lehet metsző, egyirányú (párhuzamos), illetve eltérő (ultrapárhuzamos), a metszéspontok száma pedig egy vagy egy sem.

– A szakasz a „sík” két pontját összekötő „egyenesnek” a két pont közé eső része. A távolságot itt is fokban mérjük.

– A háromszög belső szögeinek összege 0 és 180 fok között mozog.

– A területet fokban mérjük, a háromszög defektusával.

– Hasonlóság itt sincs.

Óravázlatok

Kísérletezés a gömbön

A tanítás anyaga: pont, egyenes, szakasz, háromszög, kör a gömbön.

Nevelési feladat: Az új szemléletmód, a kilépés egy zárt gondolkodásmódból abban fejleszti a gyermekeket, hogy mások gondolatmenetét könnyebben megértsék, a saját agyukban levő ismereteket pedig világosabban lássák, rendszerezzék.

Oktatási feladat: a gyerekek maguk jöjjenek rá, hogy hogyan érdemes értelmezni a gömbön az alapvető geometriai alakzatokat: a pontot, az egyenest, a szakaszt, a kört.

Képzési feladat: Önálló véleményalkotás, felfedezés.

Didaktikai feladat: ismétlés, ismeretszerzés, alkalmazó rögzítés.

Munkaformák: egyéni és frontális osztálymunka.

A szemléltetés eszközei: rajzgömb, tórusz, gömbi vonalzó, gömbi körzőkészlet, 4 színű tollkészlet.

Fogalmak: pont, szakasz, egyenes.

Az óra váza:

Ismétlés: A fogalmak az euklideszi síkon.

Célkitűzés: Vizsgáljuk meg, hogyan értelmezhetjük a gömbön a pontot, szakaszt, egyenest!

alakzatok	sík	gömb
legegyszerűbb	pont	pont
2 pont mit határoz meg	egyenest (szakaszt)	gömbi főkört (szakaszt)
2 egyenesnek hány közös pontja van	egy vagy nulla	mindig kettő
3 pont mit határoz meg	háromszöget, kört (elfajuló eset: egyenest)	háromszöget, kört (elfajuló eset: gömbi főkört)
3 egyenes mit határoz meg	háromszöget	háromszöge(ke)t (Euler-háromszög)

1. táblázat

Kérdések-feladatok: Melyik a legegyszerűbb alakzat a síkon/gömbön?

Két pont mit határoz meg a síkon/gömbön? (szakasz, egyenes) Mi lesz egy gömbi egyenes? Véges vagy végtelen síkon/gömbön? Két pont hány és milyen részre osztja a síkbeli/gömbi egyenest? Melyik rész lesz a két pont távolsága síkon/gömbön? (Rajzoljanak egyeneseket a gömbön, vegyenek fel egy pontot egy egyenesen és mérjenek fel vonalzó segítségével adott egységnyi szakaszt.)

Két egyenesnek hány metszéspontja van a síkon/gömbön? Van-e a gömbön nem metsző egyenespár? Mit tudunk két egyenes metszéspontjáról? Mit határoz meg a gömbön két metsző egyenes? (Rajzoljanak metsző egyeneseket, próbáljanak rajzolni nem metszőt is.)

Három pont mit határoz meg a síkon/gömbön? (Jelöljenek ki három pontot a gömbön és rajzolják meg a háromszöget.)

Három egyenes mit határoz meg a síkon/gömbön? A gömbön hány háromszöget kapunk? Melyik lesz a három pont által meghatározott háromszög a gömbön? Van-e ezek között a háromszögek között „hasonló”? (Rajzoljanak három egyenest, vizsgálják meg az általuk meghatározott háromszögeket.)

Mit nevezünk körnek a síkon/gömbön? Mi a különbség a kör és az egyenes között? (Rajzoljunk kört, illetve köríveket adott sugárral, adott pontból.)

Tanári segédlet: Érdemes egy táblázatot felrajzolni a gyerekeknek még az óra elején, és velük együtt kitölteni, az *1. táblázat*ban látható módon.

Két pont távolságának a köztük levő rövidebb szakaszt nevezzük. Két egyenes által meghatározott szögtartományt gömbkétszögnek nevezzük. Euler-háromszögnek az olyan háromszöget nevezzük, ahol a három pont összekötő egyenesein mindig a két pont közötti rövidebb távolságot vesszük.

Fontos, hogy a gömbi vonalzó beosztása egységnyi legyen még itt az elején és ne beszéljünk még fokokról. Ne párhuzamos egyenesekről beszéljünk, hanem nem metsző egyenesekről. Analógia a gömbkétszögre: dinnyegerezd. Fontos megbeszélni, hogy 2 metsző egyenes 2 egymással átellenes pontban metszi egymást. Analógia két átellenes pontra: északi-déli pólus, egyenesekre: egyenlítő, hosszúsági körök. Mutassunk elfajuló háromszögeket a gyerekeknek. Analógia körökre: szélességi körök. Vezessük be az Euler-háromszög fogalmát mint 3 pont háromszögét a gömbön.

(Ha érdeklődők a gyerekek, érdemes megbeszélni a pólus-poláris viszonyt pont és egyenes között. Analógia erre északi-déli pólus és az egyenlítő viszonya.)

Arról, hogy a nem euklideszi geometria valóban ellentmondás nélküli, felfedezői ugyan meg voltak győződve, de bizonyítani nem tudták. Bolyai János feljegyzéseiből tudjuk, hogy érezte ilyen bizonyítás szükséges voltát. Maga a bizonyítás azonban még évtizedekig váratott magára, a 19. század második felében azonban többen is, köztük Felix Klein, megtalálták a bizonyítás módját, mégpedig az úgynevezett modellmódszerben.

Szögmérés a gömbön

A tanítás anyaga: szögmérés, távolságmérés a gömbön, párhuzamos és merőleges egyenesek a gömbön.

Nevelési feladat: tovább tágítjuk ismereteinket, agyunkat. Az új „sík” új ötletet igényel a távolságmérésre.

Oktatási feladat: a gyerekek maguk jöjjenek rá, hogy hogyan érdemes távolságot mérni a gömbön, a nem metsző és merőleges egyenesek rajzolásával még jobban mélyítsék el a gömbi egyenes fogalmát. Az óra végére minden gyermek biztonsággal tudja használni a gömbi szögmérőt távolság-, illetve szögmérésre.

Képzési feladat: önálló véleményalkotás, felfedezés.

Didaktikai feladat: ismétlés, ismeretszerzés, alkalmazó rögzítés.

Munkaformák: egyéni és frontális osztálymunka.

A szemléltetés eszközei: gömbkészlet.
Fogalmak: szög, távolság mérése, merőlegesség, párhuzamosság.

Az óra váza:
Ismétlés: foglaljuk össze, meddig jutottunk el az elmúlt órán!
Célkitűzés: a méréshez mértékegységre van szükség. Keressünk a távolság- és szög mérésére megfelelő mértékegységet!
Feladat: Rajzoljunk fel egy gömbi szöget. Mérjünk szöget szögmérővel. Egészítsük ki a szöget gömbkétszöggé.
Kérdések: hogy lehetne másképp szöget mérni? Mivel jellemezhető egy gömbkétszög? Hogy hasonlítanál össze két szöget? (Analógia: hogy állapítanád meg, hogy melyik dinnyegerezd a nagyobb?)
A távolság mérésére bevezetjük a szöget: azt mondjuk, hogy egy gömbkétszög szöge akkora, amekkora a „derékhossza", vagyis a egy „derékhosszát" is szöggel mérjük.
Mi lesz egy 180 fokos/360 fokos szög a síkon/gömbön? Hogy szerkesztenél 60, 90, 30, 40 fokos szöget a síkon/gömbön? Mekkora két átellenes pont távolsága? Milyen hosszú egy egyenes a síkon/gömbön? (Rajzoljanak 180 fokos szöget, adott hosszúságú, „szögű" szakaszokat, adott sugarú, „szögű" kört.)
Feladat: vegyünk fel egy egyenest, rajta két pontot.
Kérdések: hogyan szerkesztenéd meg a felezőmerőlegesét a két pont szakaszának a síkon/gömbön? Megy-e a síkbeli módszer a gömbön is?
Feladat: vegyünk fel egy egyenest. Rajta egy pontot és jelöljük be e pont átellenes pontját.
Kérdések: hogy szerkesztenéd meg a felezőmerőlegesét a két átellenes pont szakaszának a gömbön? Lehet-e több merőlegest is állítani egy egyenesre a síkon/gömbön? Mi jellemzi ezeket az egyeneseket? Milyen távol van a két átellenes pont a felezőponttól, a felezőmerőlegesüktől?
Keresd meg a felezőmerőlegesen azt a két átellenes pontot, ami a felezőponttól ugyanilyen távol van. Mi a kapcsolat e 4 pont között?

Tanári segédlet: A nevezetes szögek szerkesztése úgy megy, mint az euklideszi síkon. Először ezt beszéljük meg a gyerekekkel és utána csináltassuk meg velük a gömbön.
Analógia a gömbkétszög jellemzésére: a dinnyegerezd legszélesebb része. A gömbkétszög természetesen a szögével is jellemezhető. Ha már rávezettük a gyerekeket, hogy a távolságot is szöggel mérjük a gömbön, mondjuk el, hogy a vonalzón egy egység 1 fok lesz ezentúl. Magyarázzuk el, hogyan lehet csak vonalzó segítségével adott pontból merőlegest állítani adott egyenesre. (Ha érdeklődők a gyerekek, érdemes megbeszélni a pólus-poláris és a merőlegesség kapcsolatát, vagyis ha egy egyenes merőleges az ‘egyenlítőre', akkor átmegy az egyenlítőhöz tartozó északi, illetve a déli póluson. Vegyünk erre néhány példát is.)

A hiperbolikus modell bemutatása
A tanítás anyaga: pont, egyenes, szakasz, háromszög a hiperbolikus geometriában.
Nevelési feladat: Ha már a síkon és a gömbön látták a különbségeket az alapvető alakzatok között, hadd táguljon a tanulók ismerete egy újabb modell felé. A fantázia, a képzelőerő fejlesztése, elvonatkoztatás a megszokott pont, szakasz, egyenes fogalmától. Az új szemléletmód, a kilépés egy zárt gondolkodásmódból abban fejleszti a gyermekeket, hogy mások gondolatmenetét könnyebben megértsék, a saját agyukban levő ismereteket pedig világosabban lássák, rendszerezzék.
Oktatási feladat: a tanulók ismerjenek meg egy modellt, melyben a hiperbolikus geometriát tudják vizsgálni.
Képzési feladat: önálló véleményalkotás, felfedezés, ismeretszerzési és kifejezőképesség fejlesztése.
Didaktikai feladat: ismeretszerzés.
Munkaformák: egyéni osztálymunka.
A szemléltetés eszközei: számítógépes program a Poincaré-féle körmodellhez.
Fogalmak: pont, szakasz, egyenes, háromszög.
Hangulati előkészítés: a tanár mesél a gyerekeknek a téma magyar vonatkozásá-

ról, az axiómákról, a 2000 éves problémáról, a modellről mint fogalomról.

Célkitűzés: vizsgáljuk meg a Poincaré-féle körmodell segítségével, milyenek a pontok, szakaszok, egyenesek, háromszögek a modellen!

A program bemutatása. Mit nevezünk „hiperbolikus síknak". Alapalakzatok elmagyarázása.

Kérdések: – Végy fel pontokat a síkon! Rajzolj két pontot összekötő szakaszt! Nézd meg a távolságukat! Mit tapasztalsz? Hogyan magyaráznád meg a jelenséget?

– Végy fel egyeneseket a síkon! Milyen lehet két egyenes kölcsönös helyzete?

– Rajzolj ki egy háromszöget! Olvasd le a belső szögeit! Egy papíron add össze őket! Most változtasd az egyik csúcs helyzetét, és ismételd meg a feladatot többször! Mit tapasztalsz?

– Olvasd le az oldalak hosszát! Milyen mértékegységben van megadva? Miért?

A kérdések hasonlóak, mint a gömbi kísérletezésnél. Fontos, hogy összehasonlítva ismerkedjenek a gyerekek ezzel az új modellel is. Tehát vegyék át az első két órai anyagot a hiperbolikus modellen is, annyi a különbség, hogy a merőlegesség egyszerűbb lesz, mint a gömbön.

Összefoglalás; a szabályos háromszög mindhárom modellben

A tanítás anyaga: összefoglaló óra az eddig gyűjtött ismeretek összegzésére. Új ismeret: a háromszögek néhány tulajdonsága mindhárom modellben.

Nevelési feladat: a tapasztalattal szerzett ismeret fegyelmezett, lényegre törő, jellegzetes szempontok szerint történő összefoglalása a tanulót önfegyelemre, a lényeges elemek kiemelésére neveli.

Oktatási feladat: a tanulók tudják megfogalmazni az ismeretszerzés útján elsajátított ismereteket.

Képzési feladat: ismeretszerzési és kifejezőképesség fejlesztése. Önálló véleményalkotás, felfedezés.

Didaktikai feladat: ismétlés, ismeretszerzés.

Munkaformák: frontális és egyéni osztálymunka.

Szemléltetés eszközei: számítógép, gömbkészlet.

Fogalmak: pont, szakasz, egyenes, háromszög, szabályos háromszög.

Célkitűzés: foglaljuk össze egy táblázatban, mire jutottunk eddig!

Összefoglalás: célszerű egy táblázatot készíteni a gyerekekkel mindarról az ismeretről, amelyre eddig szert tettünk. A táblázat az alábbi sorokat tartalmazza: egyenes, egyenesek kölcsönös helyzete, metsző egyenesek közös pontja, háromszög belső szögeinek az összege.

Célkitűzés: nézzük meg, hogyan viselkednek a szabályos háromszögek az egyes modelleken.

Szabályos háromszögek

Hogy szerkesztenél szabályos háromszöget síkon/gömbön/körmodellen? Tudtok-e olyan háromszöget rajzolni a síkon/gömbön/körmodellen, aminek 60 fokosak a szögei? Tudtok-e olyan háromszöget rajzolni a síkon/gömbön/körmodellen, aminek 90 fokosak a szögei? Menynyi a szögek összege az adott esetekben? Vannak-e hasonló háromszögek a síkon/gömbön/körmodellen? Mi az összefüggés a szögek és az oldalak között?

Van-e olyan háromszög síkon/gömbön/körmodellen, aminek két derékszöge van? Hány derékszöge lehet egy háromszögnek a síkon/gömbön/körmodellen? Milyen tulajdonságai vannak egy kétszer derékszögű háromszögnek a gömbön? Milyen összefüggés van az oldalak és a szögek között a kétszer derékszögű háromszögnél a gömbön? Van-e olyan háromszög a síkon/gömbön/körmodellen, aminek van nulla fokos szöge? Hány nulla fokos szöge lehet egy háromszögnek a körmodellben?

Feladatok: Rajzoljanak adott szögű szabályos háromszöget. Adott 3 szög, szerkesszenek háromszöget síkon/gömbön/körmodellen, ha ezek a háromszög szögei! Adott 3 szög, szerkesszenek háromszöget gömbön/körmodellen, ha ezek a háromszög oldalai! Rajzoljanak adott háromszöget. Méréssel állapítsák meg a szögek összegét.

Kérdések: Mennyi a szögek összege a tetszőlegesen felrajzolt háromszögben? Mi az összefüggés a háromszögek nagysága és a szögek összege között? Mennyi lehet a háromszög szögösszege minimum a síkon/gömbön/körmodellen? Mennyi lehet maximum síkon/gömbön/körmodellen?

Háromszögek egybevágósága

Szerkessz háromszöget, ha adott:

– három oldal (OOO)

– az egyik oldal és a rajtafekvő két szög (SOS)

– két oldal és a közbezárt szög (OSO)

– két szög és egy oldal (SSO)

– két oldal és egy szög (OOS)

– három szög (SSS)

Tanári segédlet: Szabályos háromszöget úgy szerkesztünk, mint az euklideszi síkon. Gömbön a háromszögek szögösszege nagyobb, mint 180 fok, a körmodellben kisebb. Nincs hasonlóság a gömbön, illetve a körmodellben. Ha egy egyenlő oldalú háromszög oldalát növelem, a gömbön nő a szög, a körmodellben csökken a szög, míg a síkon változatlan. A gömbön ez a szög 60 foktól változik 180 fokig, a körmodellben 60 foktól változik 0 fokig. Természetesen nincs egyik esetben olyan háromszög, aminek 60 fokosak lennének a szögei.

A síkbeli szerkesztéseket csak megbeszélésre javasoljuk, a másik két modellben azonban szerkesszék meg egyedül. Fontos megmutatni a hasonló szabályos háromszögeket a síkon/gömbön/körmodellen és azt is, hogy hogyan változnak a szögek az oldal növekedésével.

Vezessük be az egyszeresen, kétszeresen, háromszorosan aszimptotikus háromszögek fogalmát. Egyszeresen aszimptotikus egy háromszög, ha egy csúcsa az alapkörön van, vagyis ott a szög 0 fokos.

Területfogalom mindhárom modellben

A tanítás anyaga: területmérés.

Oktatási feladat: a gyerekek maguk jöjjenek rá, hogy hogyan érdemes a területet mérni az egyes geometriákban.

Képzési feladat: önálló véleményalkotás, felfedezés, kreativitás fejlesztése.

Didaktikai feladat: ismétlés, ismeretszerzés.

Munkaformák: frontális osztálymunka.

A szemléltetés eszközei: gömbkészlet.

Fogalom: terület

Az óra váza:

Célkitűzés: próbáljunk meg alkalmas mértékegységet találni a terület mérésére!

Feladat: Adott 3 szög, szerkessz olyan háromszöget, amelynek legnagyobb a területe. Ez a 3 szög lehet a háromszög szöge és oldala is.

Kérdések: Melyik jobb választás, ha ezeket oldalnak vagy szögnek veszszük? (Természetesen ez a megadott szögektől függ.) Hogy mérjük a háromszög területét a síkon? Jó lesz-e ez a gömbön/körmodellben? Mi lesz a magasság elfajuló/speciális esetekben?

Arányos-e a terület a szögösszeggel síkon/gömbön/körmodellen? Ha már mindent szöggel mérünk, lehet-e, hogy a terület is egy szöggel legyen egyenlő? Mi lenne ha a terület a szögösszeg lenne? Igaz lenne-e így, hogy ha egy háromszöget a gömbön/körmodellen kettévágunk két háromszögre, akkor a két kis háromszög területének összege a nagy háromszög területével egyenlő? Ha ez nem jó, mit csináljunk, hogy ez jó legyen?

A terület mérése: gömbön: szögöszszegből kivonunk 180 fokot; körmodellen: 180 fokból kivonjuk a szögösszeget.

A geometriák megkülönböztetésére használt hiperbolikus, elliptikus, parabolikus elnevezések Felix Kleintől származnak. Parabolikus geometrián az euklideszi geometria értendő (a hiány neve görögül élleipszisz, a többleté hüperbolé, az egyenlőségé parabolé). Analóg módon ezt értelmezhetjük úgy is, hogy nincs, több, illetve egy párhuzamos van a vonatkozó geometriákban.

Mi volt az egységterület a síkon? Lehet-e ehhez hasonlót venni a gömbön/körmodellen? Ha négyszöget nem, akkor lehet-e valamilyen háromszöget? Melyik az a háromszög a gömbön/körmodellen, amelyiknek egységnyi a területe a már bevezetett területfogalommal? Mennyi a területe egy háromszor derékszögű/asszimptotikus háromszögnek? Hogy számoljuk ki ezek segítségével egy kétszer derékszögű/aszimptotikus háromszög területét? Hogy számoljuk ki egy gömbkétszög területét? Hogy számolható ki egy általános háromszög területe a gömbön/körmodellen? Véges vagy végtelen a gömbfelület? Véges vagy végtelen a hiperbolikus sík?

Tanári segédlet: A szögösszeg mint terület azért nem jó, mert ha egy háromszöget felbontunk két háromszögre, akkor a két háromszög területe nem lesz egyenlő az eredeti területtel. Ez könnyen ellenőrizhető. Hasonlóan ellenőrizhető mindkét modellben, ha a jó terület fogalmat használjuk, akkor ez már jó lesz.

Általános háromszög esetében a gömböt bontsuk fel a háromszög oldalai segítségével 3 gömbkétszögre és a két egybevágó háromszögre. S az egész gömbfelületből 720 fokot kivonva a gömbkétszögek területét, megkapjuk kétszer a háromszög területét. A teljes gömbfelület területe 720 fok. Ez úgy magyarázható el, hogy ha veszünk egy olyan háromszöget, amelynek a csúcsai egy egyenesen vannak, akkor ennek a háromszögnek 180 fokosak a szögei, így a területe 360 fok, ez a háromszög pedig egy félgömböt határoz meg.

Itt is hagyjuk a gyerekeket kísérletezni a háromszögekkel, hogy maguk jöjjenek rá a területfogalomra az egyes modellekben. Fontos megnézni, hogy hol van hasonlóság az euklideszi sík és a modellek között. Vagy hol hasonlít a gömbi és a körmodell egymásra, teljesen eltérően az euklideszi síktól.

A földrajz és a matematika kapcsolata

A tanítás anyaga: mérés földgömbön, különböző vetítésű térképeken.

Nevelési feladat: a matematika szoros kapcsolatban áll más tantárgyakkal.

Oktatási feladat: a tanuló tudjon tájékozódni a földgömbön, térképeken.

Didaktikai feladat: új ismeret szerzése.

Munkaformák: egyéni osztálymunka.

Szemléltetés: földgömb, különböző vetítésű térképek.

Fogalmak: távolság.

Célkitűzés: Itt van néhány térkép és egy földgömb. Próbáljuk meg összehasonlítani őket és megállapítani, hogy vajon hogyan készülhettek!

Feladatok: – Keresd meg, illetve jelöld be Magyarország helyét a földgömbön, illetve mindegyik térképen!

– Jelölj be két várost, mondjuk New Yorkot és Párizst a térképeken! Mérd le a távolságukat! Tedd meg ezt a földgömbön is! Mit tapasztalsz?

– Ha a Malév igazgatója volnál, melyik térképet használnád?

– Próbáld meg elképzelni, hogyan jöhettek létre a különböző térképek!

Utószó

Reméljük, sokan kedvet kapnak majd, hogy diákjaikkal megismertessék a geometria által nyújtott lehetőségeket és szépségeket.

A gömbön való játszadozás, tapasztalatszerzés a tanulók számára is biztosan nagy élményt jelent. A számítógépes program kezelése sem nehéz, könnyen elsajátítható, így a hiperbolikus geometria jellegzetes világába való bekukkantáshoz remek eszköz.

További terveink: összehasonlító méréseket végezni kísérleti és kontrollcsoportban annak felderítésére, hogyan befolyásolja a középiskolás diákok matematikatanulási motivációját az ismerkedés különféle geometriákkal. Ezen kívül arra is kíváncsiak vagyunk, a matematika egyes területeinek elsajátításában jelent-e változást a tananyag gazdagítása. Úgy gondoljuk, a bizonyítási igény felkeltésében várható a leginkább hatás.

Azt szeretnénk, ha tanítványaink is közelebb kerülnének annak megértéséhez, mit érezhetett Bolyai János, amikor ezt írta: „Semmiből egy új, más világot teremtettem.”

Irodalom

Bolyai János (1973): *Appendix, a tér tudománya.* Szerkesztette Kárteszi Ferenc. Akadémiai Kiadó, Budapest.
Császár Ákos (1981): Hogyan látta Hilbert a matematika jövőjét. In: *Nagy pillanatok a matematika történetében.* Gondolat, Budapest.
Dávid Lajos (1979): *A két Bolyai élete és munkássága*. Gondolat, Budapest.
Földrajzi világatlasz. (1992) Kartográfiai vállalat, Budapest.
Horváth Jenő: *Sztereografikus projekció és alkalmazása, elemi geometria a Poincaré-féle félgömbmodellen.*
Lénárt István (1996): *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere.* Key Curriculum Press, USA.
Németh László (1977): *A két Bolyai*. Magvető – Szépirodalmi Könyvkiadó, Budapest.
Szilassi Lajos: *A hiperbolikus geometria Poincaré-féle körmodellje. Háttérismeretek a Bolyai.exe programhoz.*

Trepszker Zsuzsanna