Kovács Szilvia

A Galois-gráf alkalmazása a fizika tanításában

Napjainkban igen széles a tankönyvek skálája, és a tanárnak döntenie kell, melyiket választja. Az egyes tankönyvek tananyag-feldolgozása ugyanis nem teljesen egységes, főleg sorrendi szempontból. Egyetemi éveim alatt gyakran találkoztam ebből adódó problémákkal. Saját tanítványaimnál tapasztalhattam, mennyire lényeges a tananyag tanítási sorrendje, illetve a jó tankönyv megválasztása. Felmerül tehát a kérdés: létezik-e optimális sorrend a tananyag feldolgozásában, és ha igen melyik az? A Galois-gráf, e korszerű matematikai eljárás segítségünkre lehet.

A Galois-gráf vizuálisan ábrázolja a tananyag szerkezetét, s így a kapott rajz alapján segíti a tanárt a tanítandó tananyag optimális elrendezésében, ennek révén a megfelelő tankönyv kiválasztásában is.

A Galois-gráf elkészítéséhez és a leírtak alkalmazásához előismeret nem szükséges, csupán a halmazelméleti egyesítés és metszés műveletére, valamint a számítógép szövegszerkesztőként való felhasználásának ismeretére épít, ugyanakkor a tudományosság és az objektív értékek szerinti elbírálás lehetőségét is megadja.

Az eljárást a fizika egy szűk területén, az optikán belül alkalmazom, de remélem, jól látható lesz, hogy az bármely más szakterületen is alkalmazható.

Röviden a Galois-gráfról

Objektumok (tanulók) és tulajdonságok (helyesen megoldott feladat) között létesítünk több-többértelmű kapcsolatot, vagyis egy adott objektumhoz több tulajdonság is tartozhat és viszont. A közös tulajdonságok (azonosak a jól megoldott feladatok) az objektumok egy részhalmaza és a tulajdonságok egy részhalmaza között egy-egyértelmű kapcsolatot létesít. Az ilyen részhalmaz-párt zártnak nevezzük, mert sem a tulajdonságok, sem az objektumok részhalmaza nem bővíthető anélkül, hogy a másik részhalmaz elemeinek száma ne csökkenne. A zárt részhalmaz-párokat matematikai eljárás segítségével, számítógéppel meg tudjuk keresni. Ehhez a tulajdonságokat és objektumokat relációtáblába kell rendeznünk, ez lesz a számítógép számára inputként szolgáló relációtábla. Outputként a zárt részhalmaz-párok listáját kapjuk meg. A gráfot a zárt részhalmaz-párok alapján készítjük el. Minden zárt részhalmaz-párt egy körrel jelölünk. Eldöntjük, hogy az objektumok vagy a tulajdonságok szerint kívánjuk-e elkészíteni a gráfot. Rendezzük például tulajdonságok szerint. Rajzoljuk egymás mellé az egyelemű zárt tulajdonság részhalmazokat, föléjük egy másik szintre a kételeműeket stb. Így kapjuk a gráf szögpontjait. Az első emelet alá rajzoljunk egy nulla emeletet, a legfelső fölé pedig a minden elemet jelző kört. A pontokat a következő szabály szerint kötjük össze: válasszunk ki egy tetszőleges szögpontot, majd ezt kössük össze minden olyan alatta levővel, amely ennek legnagyobb részhalmazát jelölő kör. Az eljárást minden szögpontra ismételjük meg. Ezután a szögpontok alá beírjuk azokat a részhalmaz-párokat, amely szerint rendeztünk, fölé pedig a hozzá tartozó objektum-részhalmazokat. Ezzel egy úgynevezett Galois-gráf áll előttünk.

Az elkészült gráf megadja a vizsgált dolgok és tulajdonságaik teljes fogalmi rendszerét, illetve hierarchiáját. Leolvasható, milyen szerkezetet alkot a fogalmak rendszere, illetve megállapítható, hogy melyek az össze nem hasonlítható fogalmak, ezek egymás mellett (egy szinten) találhatók a rajzon.

Összefoglalva: „A Galois-gráf véges számú objektum és tulajdonság közötti többtöbbértelmű összefüggést visszavezeti zárt objektumcsoportok és tulajdonságcsoportok közötti egy-egyértelmű összefüggésre úgy, hogy ezek ábrázolása megmutatja a köztük levő hierarchiát és struktúrát is. Az egy-egyértelmű összefüggések a felvett adatokból alakítható teljes fogalmi rendszert mutatják."

A Galois-gráf a hálóelméleten alapul, tehát matematikai szemléletű, elkészítése algoritmikus, nem heurisztikus és objektív képet ad az adott témáról. Esetünkben egyrészt a tanulók tudásának szerkezetéről, illetve a tananyag ideális szerkezetéről. Az előbbi lehetőséget ad a tanárnak az osztályzásra, így a dolgozat megíratása nem öncélú, az beépíthető a tanmenetbe, utóbbi pedig tájékoztatást ad egy követendő tanítási sorrendről, és ez az, amit igyekszem vizsgálódásom középpontjába állítani.

Amellett, hogy a dolgozatokat objektíven értékeljük, akár az osztály, illetve csoport egészének teljesítményéhez viszonyítva, a tananyag olyan struktúráját is megkapjuk, amelynek alapján megállapítható, hogy a tananyagrészek tanításának melyik az az ideális sorrendje, amellyel a legjobb eredményt érhetjük el. Mindezt leolvashatjuk a megfelelően felrajzolt Galois-gráfról.

Gráfunk valamely szögpontja a valamely legnagyobb feladatcsoportot jól megoldó legnagyobb tanulócsoportot jelenti. A gráfot egészében tekintve pedig megtudhatjuk, hogy milyen ismeretelemek fordulnak elő együtt, ezek milyen más ismeretelemek együttesére épülnek, és hogy mely tanulók tartoznak ebbe a csoportba. Így ez az elrendezés megmutatja a csoport tudásszerkezetét. A gráf továbbá alkalmas hagyományos osztályzatok megállapítására is. Megállapítjuk, hogy a gráf melyik emelete hányas osztályzatnak felel meg, és eszerint meghúzzuk azokat a vízszintes vonalakat, amelyek az egyes osztályzatokat jelentik.

A kiértékelés alapjai és menete, elnevezések

A kitöltött dolgozatlapok alapján minden esetben elkészíthető a tanulók-feladatok relációtábla, melynek egyes sorait aszerint töltjük ki, hogy az adott tanuló a feltüntetett feladatot megoldotta-e – ebben az esetben a relációtáblában 1 szerepel, vagy nem oldotta meg – ebben az esetben az adott feladatszám alatt 0 szerepel. Mivel a relációtábla a Galois-gráf elkészítésének alapja, abban a feladatszámok természetesen a már feltüntetett feladatokat jelentik, vagyis azokat az elemi egységeket, amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy a tanuló megoldotta-e vagy sem. Előfordulhat, hogy a relációtábla azonos sorokat vagy oszlopokat tartalmaz, melyek azonban a mi számunkra nem különbözőek, ezért ebben az esetben külön el kell készíteni egy relációtáblát, amely a számítógépes program inputjául szolgál, ennek minden sora és oszlopa különböző. Outputként e relációtáblázat zárt részhalmaz-párjait adja ki a program, melyek alapján a gráf elkészíthető. Ezután meg kell keresnünk az úgynevezett optimális utat, s annak révén a problémáknak azt a tanítási sorrendjét, mellyel a legtöbb diákot a legteljesebb tudás birtokába juttathatjuk. Az optimális út megkeresésének algoritmusához meg kell értenünk, mit is jelentenek a kiválasztott szögpontok, ezért ennek ismertetését lényegesnek tartom.

A gráfokat tekintve azt látjuk, hogy az első emeleten az alapnak tekinthető ismeretek foglalnak helyet, ezekre épül aztán a többi ismeret. Az optimális út egy olyan út a gráfon, amely kevés, alapozó ismerettől több vagy esetleg a legtöbb ismerethez vezet. Ennek az útnak a megkeresésére használható az alábbi algoritmus.

Szögpont számossága

Egy m + 1 emeletes gráf x-edik emeletén levő P^x szögpontjából, az összes x + k-adik emeletre haladó szakasz-gráfél-számát a $\#P^x$ jellel jelöljük, ahol x + k >= 0 és k >= 1, míg az összes x-ediknél kisebb emeletre haladó szakasz számát $\#P^x$ jellel jelöljük, ahol x-k >= 0 és k >= 1, és a P^x szögpont felső, illetve alsó számosságának nevezzük.

Egy gráf összes emeletének száma m + 1, így az emeletek száma x. Lehetséges értékei x = 0,1,…, m.

$\#P_1^x > \#P_2^x$ esetén P_1^x a P_2^x-nél nagyobb felső, illetve $\#\underline{P}_1^x > \#\underline{P}_2^x$ esetén P_1^x a P_2^x-nél nagyobb alsó számosságú.

Maximális számú szögpont

Ha a gráf x-edik emeletének pontosan egy olyan P^x szögpontja van, amelyre $\#P^x$ = maximum, akkor azt max $\#P^x$-szel jelöljük, és maximális felső számosságú szögpontnak mondjuk.

Hasonlóképpen vezetjük be a max $\#P^x$ maximális alsó számosság jelét is.

Ekvivalens szögpontok

Ha $\#P_1^x = \#P_2^x$, akkor P_1^x és P_2^x felülről, ha pedig $\#\underline{P}_1^x = \#\underline{P}_2^x$, akkor alulról ekvivalens szögpontok.

Emeletugrás

Ha P^x-ből az x-edik emeletről olyan P^x + k-ba halad egy szakasz, hogy k > a, akkor emeletugrásról beszélünk.

Ha több k – k1, k2…– van, akkor k1 > k2 esetén a k1 mentén az emeletugrás nagyobb.

Lépésszám

Lépésszámnak nevezzük és α^x -szel jelöljük az x-edik emeletről, P^x szögpontból az m-edik (utolsó) emeletre vezető, az emeleteket összekötő szakaszok számának összegét: $\alpha^x = \sum{}^{m}{}_{k=x} k$, minden Pk-ra, k <= m - x.

Ha egy P^x-re van olyan α^x , ahol α_i^x = m - x, i <= (x^m), ahol x < m, akkor nincs emeletugrás.

Ha egy P_1^x-hez tartozó minden α_i^x-re α_i^x <= m - x, akkor van emeletugrás, és m - x - α_i^x egyenlő az emeletugrások számával.

Az optimális út megkeresésének algoritmusa

1. Ha az x-edik emeleten van felső maximális szögpont, akkor ezt a P^x-et választjuk.
2. Ha nincs, akkor azt a P^x-et választjuk a legnagyobb felső számosságú, felülről ekvivalens szögpontok közül, amelyből halad gráfél a max $\#P^{x+1}$-nek megfelelő szögpontba, ha van felső maximális szögpont az x + 1-edik emeleten.
3. Ha nincs, akkor azt a P^x-et választjuk, amely max $\#\underline{P}^x$, ha van alsó maximális szögpont az x-edik emeleten.
4. Ha nincs, akkor azt a P^x-et választjuk, amelyet összeköt gráfél a max $\#\underline{P}^{x+1}$-gyel, ha van maximális szögpont az x + 1-edik emeleten.
5. Ha nincs, akkor a legnagyobb felső számosságú, felülről ekvivalens, x-edik emeleti szögpontok közül azt a P^x-et választjuk, amelyre α^x = maximum, azaz amelynek legnagyobb a lépésszáma.
6. Emeletugrást az x-edik emeleten csak akkor választunk, ha az 1–5. szabályok egyike sem dönt a P^x kiválasztásában. Ebben az esetben azt a P^x-et választjuk, amelyhez tartozó α^x bármely más α_i^x-nél nagyobb.
7. Ha az 1–6. szabályok alkalmazása nem dönt a P^x kiválasztásában, akkor az x-edik emelet ekvivalens szögpontjai közül azokat a P^x-eket választjuk, amelyekből az x + 1-

edik emelet ekvivalens szögpontjai közül azonos P^{x+1}-be vezetnek gráfélek az x-edik emeletről.

8. Az eljárást x = 0-tól kezdve, rendre x = m-ig elvégezzük.

9. A kiválasztott szögpontokat az elemek növekvő sorszámának sorrendjében összekötjük. Az eljárás eredményeként egy olyan törött vonalat kapunk, amely a gráf 0-dik emeletéről az m-edikig vezet. Ezt nevezzük optimális útnak.

Ha az optimális út egy része elágazik, majd újra egyesül, akkor hurokról beszélünk. A hurok két végpontja közötti utak ekvivalens utak.

A vizsgálat tárgya, illetve célja

A vizsgálat tárgya az optika, ezen belül is főleg a geometriai optika kiegészítve néhány, az általános iskolában is tanult hullámoptikai fogalommal. A megtanítandó fő témakörök, fogalmak és képletek:

Az általános iskola 8. osztályában

A síktükör
– a síktükör képalkotása;
– a kép nagysága, állása, képtávolság, a kép természete;
– valódi kép, látszólagos kép;
– a síktükörben látott kép jellemzése.

A gömbtükrök
– fajtái;
– fénytani középpont, geometriai középpont, optikai tengely, görbületi sugár;
– fókusz, fókusztávolság;
– f = r/2;
– a homorú, illetve domború tükör képalkotása.

A tükörképek. *(1. táblázat)*

A fénytörés lencséken
– optikai lencse, lencsék fajtái;
– dioptria: a méterben kifejezett fókusztávolság reciproka.

A lencsék képalkotása *(2. táblázat)*
– jellegzetes sugármenetek;
– leképzési törvény mint tapasztalati tény;
– a nagyítás N = K/T = k/t.

A gimnázium 3. osztályában

Az optikai lencsék és tulajdonságaik;
– az optikai lencse definíciója;
– az optikai lencsék fajtái, a vékonylencse fogalma;
– optikai tengely, optikai középpont;
– fókuszpont (valódi, illetve látszólagos), fókusztávolság;
– törőerősség D = 1/f = (n-1)(1/r1 + 1/r);
– nevezetes sugármenetek.

Az optikai tükrök és tulajdonságaik
– definíciója és fajtái;

tükör	a tárgy			a kép	
	helye	természete	állása	nagysága	helye
síktükör	tetszőleges	látszólagos	egyező	tárggyal megegyező	tükör mögött
domború tükör	tetszőleges	látszólagos	egyező	kicsinyített K < T	tükör mögött k < t
homorú tükör	t < f	látszólagos	egyező	nagyított K > T	tükör mögött
	t = f	nincs kép			
	t > 2f	valódi	fordított	kicsinyített K < T	tükör előtt k < t
	f < t < 2f	valódi	fordított	nagyított K > T	tükör előtt k > t

1. táblázat. Tükörképek

lencse	a tárgy			a kép	
	helye	természete	állása	nagysága	távolsága
homorú	tetszőleges	látszólagos	egyező	kicsinyített K < T	lencse előtt -k < t
domború	t < f	látszólagos	egyező	nagyított K > T	lencse előtt -k > t
	t = f	nincs kép			
	f < t < 2f	valódi	fordított	nagyított K > T	lencse mögött k > t
	t = 2f	valódi	fordított	megegyező K = T	lencse mögött k = t
	t > 2f	valódi	fordított	kicsinyített K < T	lencse mögött k < t

2. táblázat. A lencsék képalkotása

– geometriai középpont, optikai középpont, optikai tengely;
– gömbtükör sugara, fókusztávolsága f = r/2;
– nevezetes sugármenetek.

A leképzés lencsékkel és tükrökkel
– képtávolság, tárgytávolság;
– leképzési törvény 1/t + 1/k = 1/f, illetve k = tf/(t - f);
– nagyítás N = K/T = k/t;
– képtulajdonságok;
– síktükör képalkotása -k = t.

A fénytörés új közeg határán, az optikailag sűrűbb, illetve ritkább közeg fogalma.

Jól látható az is, hogy az általános iskolában, illetve a gimnáziumban a tananyagot teljesen fordított sorrendben dolgozzák fel. Talán azért, mert az általános iskolában a tárgyalás sokkal inkább a tapasztalatokon alapul.

Ennek megfelelően a kiértékelés két fő fejezetre tagolódik.

Az első részben az általános iskolában íratott dolgozatok, illetve a gimnáziumban íratott dolgozatok alapján optimális utat keresünk az egyes iskolatípusokban külön-külön, a második részben a két optimális út összehasonlítása zajlik tartalmi szempontok alapján. Mivel a gimnáziumi tananyag az itt részletesen tárgyaltnál jóval bővebb, és az itt elemzett feladatok egy témazáró feladatlap részeként szerepeltek, ezért lehetőség adódott arra is, hogy a teljes gimnáziumi optikaanyag struktúráját megkíséreljem elkészíteni, de ez technikai okok miatt nem járt sikerrel, ugyanis több mint 500 szögpontos gráfokat kellett volna megrajzolni és kielemezni.

A vizsgálat módja

A felméréseket a következő iskolákban és körülmények között végeztem el:
Az általános iskolai felmérések
– helye: Horváth István Általános Iskola, Pétfürdő;
– időpontja: 1998. május;
A felmérésben résztvevő osztályok: 8. A, 8. B.
Fizikatanár: *Lukácsi Imréné.*
A feladatmegoldás ideje: 45 perc. Segédeszköz nem használható.

A tananyagrész tárgyalása előtt a tanár számára már ismertek voltak a feladatsorok, melyeket utólagosan módosítani kellett néhány pontban, mivel az idő rövidsége miatt néhány rész részletesebb tárgyalására nem volt lehetőség. Így a megíratott dolgozat a következő példákból állt:

Feladatsorok az általános iskola 8. osztálya számára

A csoport

1. Rajzold meg a tárgy képét a nevezetes sugármenetek felhasználásával! Tüntesd fel az összes nevezetes sugármenetet! Jellemezd a képet! Nevezd el a betűvel jelölt pontokat! (Homorú tükör, kétszeres fókusztávolságon kívüli tárgy.)

2. Egy domború lencse fókusztávolsága 10 cm. Milyen messze kell helyezni a tárgyat a lencsétől, hogy valódi képet kapjunk? Kicsinyített képet kapjunk? Tárggyal megegyező állású képet kapjunk?

3. Egy síktükörtől 6 cm-re áll egy 3 cm magas tárgy. Szerkeszd meg a tárgy képét! Jellemezd ezt a képet!

4. A fénysugár vízből levegőbe lép. A törési szög egyenlő a beesési szöggel, hogyan lehetséges ez? Hány fokos a törési szög?

5. Egészítsd ki a mondatot!
Ha a fény optikailag sűrűbb anyagából ritkábba lép, akkor...
A merőlegesen beeső fénysugár...
Más szögben beeső fénysugár esetén…

Javítókulcs

1. feladat	
A 4 sugármenet megrajzolása 1-1 pont.	4 pont
Jellemzés: Valódi, fordított állású, kicsinyített kép.	3 pont
Elnevezések: C – geometriai kp, A – optikai kp, B – fókuszpont.	3 pont
Összesen	10 pont
2. feladat	
Valódi kép: $t > 10$ cm	1 pont
Kicsinyített kép $t > 20$ cm	1 pont
Tárggyal megegyező állású kép. $t < 10$ cm	1 pont
Összesen	3 pont
3. feladat	
Szerkesztés	2 pont
(mivel 2 sugármenetet igényel).	
Jellemzés: látszólagos, egyező nagyságú és állású.	3 pont
Összesen	5 pont
4. feladat	
A fénysugár a felületre merőlegesen érkezett.	1 pont
A törési szög 0 fokos.	1 pont
Összesen	2 pont
5. feladat	
a, nem törik meg	1 pont
b, megtörik vagy teljesen visszaverődést szenved	2 pont
Összesen	3 pont
A dolgozat pontszáma összesen:	23 pont.

B csoport

1. Rajzold meg a tárgy képét a nevezetes sugármenetek felhasználásával! Tüntesd fel az összes nevezetes sugármenetet! Jellemezd a képet! Nevezd el a betűvel jelölt pontokat! (Homorú tükör, kétszeres fókusztávolságon kívüli tárgy.)

2. Egészítsd ki a mondatot!

Ha a fény optikailag sűrűbb anyagból ritkább lép, akkor...

A merőlegesen beeső fénysugár…

Más szögben beeső fénysugár esetén…

3. Egy domború lencse fókusztávolsága 20 cm. Milyen messze kell helyezni a tárgyat a lencsétől, hogy valódi képet kapjunk? Kicsinyített képet kapjunk? Tárggyal megegyező állású képet kapjunk?

4. A fénysugár vízből levegőbe lép. A törési szög egyenlő a beesési szöggel, hogyan lehetséges ez? Hány fokos a törési szög?

5. Egy síktükörtől 5 cm-re áll egy 4 cm magas tárgy. Szerkeszd meg a tárgy képét! Jellemezd ezt a képet!

Javítókulcs

1. feladat	
A 4 sugármenet megrajzolása 1-1 pont.	4 pont
Jellemzés: Valódi, fordított állású, kicsinyített kép.	3 pont
Elnevezések: C – geometriai kp, A – optikai kp, B – fókuszpont.	3 pont
Összesen	10 pont
2. feladat	
a, nem törik meg	1 pont
b, megtörik vagy teljesen visszaverődést szenved	2 pont
Összesen	3 pont
3. feladat	
Valódi kép t > 20 cm	1 pont
Kicsinyített kép t > 40 cm	1 pont
Tárggyal megegyező állású kép t < 20 cm	1 pont
Összesen	3 pont
4. feladat	
A fénysugár a felületre merőlegesen érkezett.	1 pont
A törési szög 0 fokos.	1 pont
Összesen	2 pont
5. feladat	
Szerkesztés	2 pont
(mivel 2 sugármenetet igényel).	
Jellemzés: látszólagos, egyező nagyságú és állású.	3 pont
Összesen	5 pont
A dolgozat pontszáma összesen:	23 pont.

Mint látható, az egyes csoportok csupán a feladatok sorrendjében, illetve néhány számbeli adatban különböznek egymástól, ami a feladatmegoldás szempontjából nem jelent lényegi különbséget, így a két csoport azonosnak vehető, csupán a kiértékeléskor kell arra figyelni, hogy a megfelelő számokhoz a megfelelő részfeladatot rendeljük hozzá.

Teljes relációtábla *(folytatás a következő oldalon)*:

Tanulók/feladatok	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
1. Baranyai Dániel	1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1
2. Vit Viktor	1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1
3. Farkas Andrea	1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
4. Keresztes Gábor	1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 01 1 1 1 0 0 1 1 0 1
5. Csanyiga Péter	0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0

Tanulók/feladatok	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
6. Horváth Gergő	1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0
7. Bendei Alexa	0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 01 1 0 1 0 1 1 1 0
8. Lázár Csaba	0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0
9. Ámán Andrea	1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0
10 Nádasi Mihály	0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0

Azonos oszlopok: 1 = 2 = 3

Ezek figyelembevételével az inputként szolgáló relációtábla:

11011111000111010l111
1111100100100001011 11
11111011111111111110
10001101000111100110 1
01100000000000000011000
1111000100010101 11000
0100110100000110101110
0101100000000000001000
1001110100000010001100
0111110001010000 01000

A zárt részhalmaz-párok listája *(folytatás a következő oldalon)*:

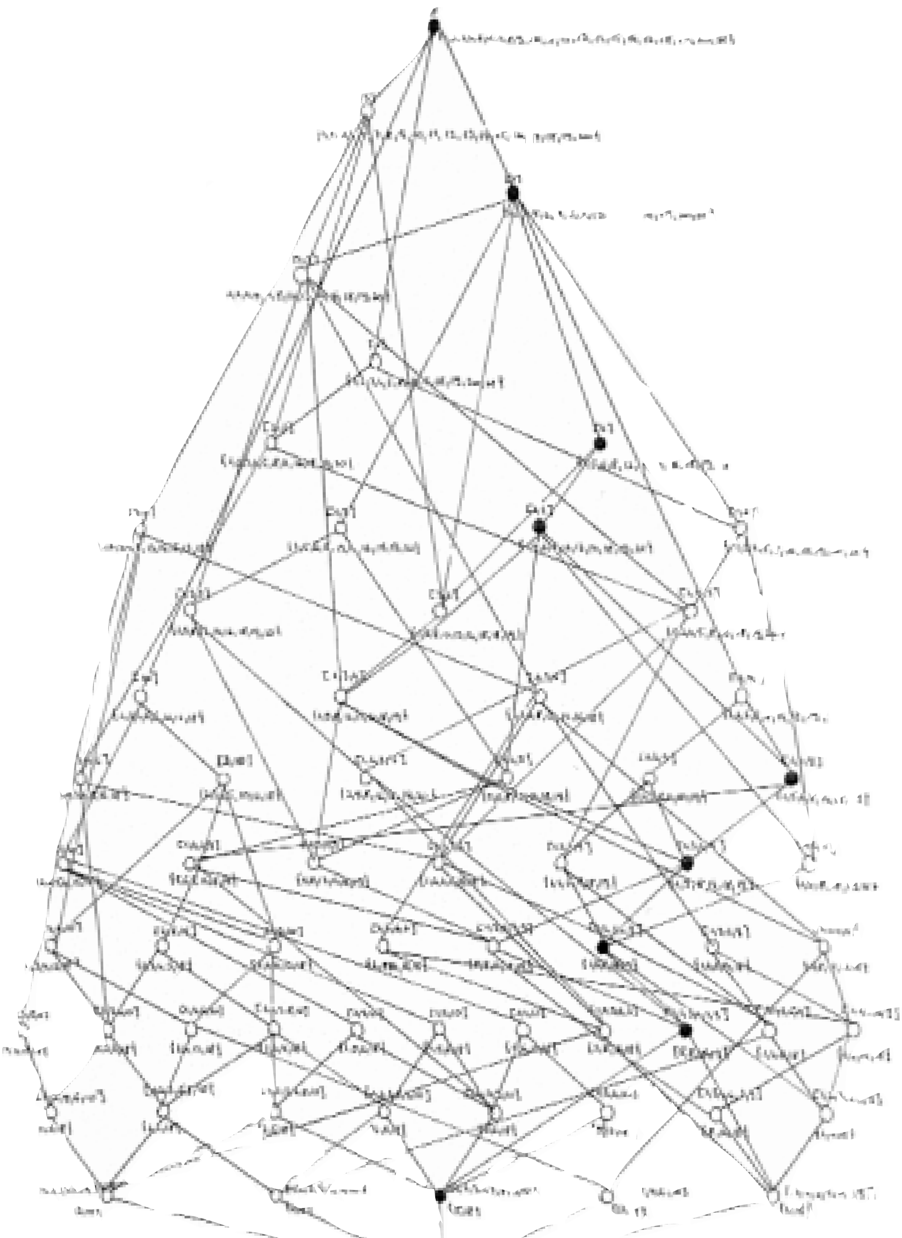
1.	> {1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}	: (3)
2.	> {1,2,4 5,6,7,8,12,13,14,16,18.19,20,21}	: (1)
3.	> {1,2,4,5,7,8,12,13,14,16,18,19,20}	:(1,3)
4.	> {1,2,3,4,5,8,11,16,18,19,20,21}	:(2)
5.	> {1,2,3,4,5,8,11,16,18,19,20}	:(2,3)
6.	> {1,5,6,8,12,13,14,15,18,19,21}	:(4)
7.	> {2,5,6,8,13,14,16,18,19,20}	:(1,7)
8.	> {1,5,6,8,12,13,14,18,19,21}	:(1,4)
9.	> {1,2,4,5,8,16,18,19,20,21}	:(1,2)
10.	> {1,2,3,4,8,12,14,16,17,18}	:(3,6)
11.	> {2,5,8,13,14,16,18,19,20}	:(1,3,7)
12.	> {1,2,4,5,8,16,18,19,20}	:(1,2,3)
13.	> {1,5,8,12,13,14,15,18,19}	:(3,4)
14.	> {1,4,5,6,8,14,18,19}	:(1,9)
15.	> {1,2,4,8,12,14,16,18}	:(1,3,6)
16.	> {1,5,8,12,13,14,18,19}	:(1,3,4)
17.	> {2,3,4,5,6,10,12,18}	:(10)
18.	> {1,5,6,8,14,18,19}	:(1,4,9)
19.	> {5,6,8,13,14,18,19}	:(1,4,7)
20.	> {1,4,5,8,14,18,19}	:(1,3,9)
21.	> {2,5,8,16,18,19,20}	:(1,2,3,7)
22.	> {1,2,3,4,8,16,18}	:(2,3,6)
23.	> {2,3,4,5,10,12,18}	:(3,10)
24.	> {2,4,5,6,12,18}	:(1,10)
25.	> {5,6,8,14,18,19}	:(1,4,7,9)
26.	> {1,5,6,14,18,19}	:(1,2,4,9)
27.	> {5,8,13,14,18,19}	:(1,3,4,7)
28.	> {1,5,8,18,19,21}	:(1,2,4)
29.	> {1,4,5,8,18,19}	:(1,2,3,9)
30.	> {1,2,4,8,16,18}	:(1,2,3,6)
31.	> {2,4,5,12,18}	:(1,3,10)
32.	> {1,4,8,14,18}	:(1,3,6,9)
33.	> {2,8,14,16,18}	:(1,3,6,7)
34.	> {5,8,14,18,19}	:(1,3,4,7,9)
35.	> {1,8,12,14,18}	:(1,3,4,6)
36.	> {1,5,8,18,19}	:(1,2,3,4,9)
37.	> {2,3,4,5,18}	:(2,3,10)
38.	> {2,3,4,12,18}	:(3,6,10)

39.	> {4,5,6,18}	:(1,9,10)
40.	> {2,5,6,18}	:(1,7,10)
41.	> {5,6,12,18}	:(1,4,10)
42.	> {2,4,12,18}	:(1,3,6,10)
43.	> {1,8,14,18}	:(1,3,4,6,9)
44.	> {2,4,5,18}	:(1,2,3,8,10)
45.	> {1,4,8,18}	:(1,2,3,6,9)
46.	> {2,8,16,18}	:(1,2,3,6,7)
47.	> {5,8,18,19}	:(1,2,3,4,7,9)
48.	> {2,3,4,18}	:(2,3,6,10)
49.	> {2,3,17,18}	:(3,5,6)
50.	> {5,6,18}	:(1,4,7,9,10)
51.	> {5,12,18}	:(1,3,4,10)
52.	> {8,14,18}	:(1,3,4,6,7,9)
53.	> {4,5,18}	:(1,2,3,8,9,10)
54.	> {2,5,18}	:(1,2,3,7,8,10)
55.	> {2,4,18}	:(1,2,3,6,8,10,
56.	> {1,8,18}	:(1,2,3,4,6,9)
57.	> {2,3,18}	:(2,3,5,6,10)
58.	> {8,18}	:(1,2,3,4,6,7,9)
59.	> {5,18}	:(1,2,3,4,7,8,910)
60.	> {2,18}	:(1,2,3,4,5,6,7,8,10)
61.	> {4,18}	:(1,2,3,6,8,9,10)
62.	> {12,18}	:(1,3,4,6,10)
63.	> {18}	:(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

A gráf összesen tehát 63 szögpontból áll. A zárt részhalmaz-párok alapján elkészített „feladatadatok-tanulók gráf"-ot az *1. ábrá*n láthatjuk.

A gráfról leolvasható optimális út feladatszámokkal, illetve tartalmukkal leírva:

18: A tárgy csúcspontján átmenő sugár megszerkesztése (5)
5: Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező sugár a fókuszponton keresztül verődik vissza (1)
8: Optikai középpont megnevezése (1)
19: A tárgy talppontján átmenő sugár megrajzolása (5)
1: Valódi; fordított állású; kicsinyített kép keletkezik (1)
14: A tárggyal megegyező állású kép keletkezésének helye (3)
6: Fókuszpont megnevezése (1)
12: A valódi kép keletkezésének helye (3)
13: A kicsinyített kép keletkezésének helye (3)
21: A keletkező kép az eredetivel egyező állású (5)
2: A fókuszponton keresztül érkező sugár az optikai tengellyel párhuzamosan verődik vissza (1)
4: Optikai középponthoz a szögben érkező sugár visszaverődése (1)
15: A beeső fénysugár merőleges a felületre (4)
20: A keletkezett kép a tárggyal egyező nagyságú (5)
7: Geometriai középpont megnevezése (1)
3: Geometriai középponton átmenő sugár megrajzolása (1)
11: A merőlegesen beeső fénysugár nem törik meg (2)
9: A felületre nem merőlegesen beeső fénysugár megtörik (2)
10: A nem merőlegesen beeső fénysugár vissza is verődhet (2)
16: A törési szög is 90 fokos (4)
17: A keletkezett kép látszólagos (5)



1. ábra. Feladatok-tanulók gráf

Néhány tanulság

Az optimális út keresésére eredetileg megadott algoritmus (1–9-ig) nem intézkedett arról, hogy mi történjék, ha egy emeleten kijelölt legjobb pont nincs összekötve a következő emelet legjobb pontjával. Ez azért okoz gondot, mert csakis ilyen pontok mentén vezethet az optimális út. Miért? Mert így egyre bővülő halmazok keletkeznek a felfelé haladás során. Pedagógiai értelemben ez azt jelenti, hogy valamit megtanítunk, s ezt az ismeretanyagot bővítjük a tanítás következő lépésében. Míg ha egy bizonyos (mondjuk x-edik) emelet legjobb pontja után a következő (x + 1-edik) emelet legjobb pontja nincs az előbbivel összekötve, akkor az azt jelenti, hogy az (x-edik) emelet legjobb pontja nincs az előbbivel összekötve, s az x-edik emeleten levő pont által reprezentált halmaz az x + 1-edik emeleten lévő pont által jelzett halmazban egyrészt nem egy, hanem több elemmel bővült, másrészt viszont a kisebb halmaz bizonyos eleme hiányzik belőle. Például (1, 2, 6, 9, 16) után, ha (1, 2, 36, 9, 18) következik, akkor igaz ugyan, hogy egy elemmel bővült a halmaz, de egyrészt új a 2 és a 18. Másrészt hiányzik a 16. Tehát olyan, mintha emeletugrás volna, mert két új elem van, de ráadásul valamilyen ismeretelem hiányzik is. Tanítás szempontjából egyszerre két új ismeretet tanítunk, és kihagyjuk, hogy építsük a már tanított 16-ra. Egyszóval az optimális út – a mi céljaink értelmében – nem lehet olyan, hogy a gráfon össze nem kötött pontok mentén haladjon. Vagy legalábbis nem célszerű. A probléma megoldásához *Takács Violá*tól kaptam segítséget. Az ő javaslata és a saját elképzeléseim alapján az algoritmus kiegészült a 0. és 10. ponttal, illetve egy, az emeletugrásokhoz kapcsolódó megjegyzéssel.

0. pont: minden emeleten kiválasztunk egy „legjobb" pontot az 1–7 szabályok szerint. Egy adott emeleten csak olyan legjobb pont választható, amely össze van kötve az előző emeleten választott legjobb ponttal, s amelyet választva a következő emeleten választott pont is össze van kötve a szóban forgóval.

10. pont: ha ellentmond a 0. szabály az 1–7-nek, akkor nem maximális felső, illetve alsó számosságú pont választandó, hanem az alsó és felső számosság összegének maximumát jelentő pont, akkor is, ha ez emeletugrást jelent. Ha egyenlő a felső és alsó számosság összege egynél több pontnál, akkor azt választjuk, amelyik pont össze van kötve a következő emelet legjobb pontjával.

Megjegyzés: amennyiben mégis emeletugrást kényszerülünk választani – ami az általam készített gráfok esetén mindegyik esetben így történt –, akkor az optimális út megállapításánál azt a feladatot helyezem előbbre, amelyik alsóbb emeleten jelent meg először.

Mint már említettem, a felmérések bármely területre elvégezhetők. Ahhoz azonban, hogy a felmérések kiértékelése ne okozzon gondot, célszerű azokat 8–10 fős csoportokkal végezni, és olyan egységekre bontani a tananyagot, illetve olyan kérdéssorokat készíteni az egyes egységekhez, amelyek nem állnak körülbelül músznál több egységből. Még ekkor is előfordulhat, hogy annyira különböző a gyermekek tudásszintje, hogy igen sok szögpontból álló gráfot kapunk, melynek ábrázolása nehézségekbe ütközik.

Így az eljárás továbbfejleszthető, a gráfokat számítógéppel megrajzolva. Ha erre külön programunk lenne, semmi nem szabhatna határt a módszer alkalmazásának.

Irodalom

TAKÁCS Viola: *A tudásszerkezet mérése*. JPTE TKI PSZMP Programiroda, Pécs, valamint Iskolakultúra 1997/6–7. sz. melléklet

TAKÁCS Viola: *A tananyag, a tudás és a közösség szerkezete*. Bp, 1997. kézirat

HOLICS László: *Fizika III.* (Gimnázium) Tankönyvkiadó, Bp, 1991.

HŰBÉR Magdolna: *Fizika az általános iskola 8. osztálya számára.* Konsept-H Kiadó, Bp, 1994.

ZÁTONYI Sándor – Ifj. ZÁTONYI Sándor: *Fizika 2. Elektromosságtan és fénytan.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp, 1994.