Takács Tímea

Gyökök és együtthatók közötti összefüggés tanítása

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés bizonyításához célszerű első lépésként a tanulókkal megsejtetni, hogy létezik valamilyen összefüggés. Mindenképpen kell valamilyen kiindulópontot adni, hiszen csekély a valószínűsége, hogy a gyerekeknek maguktól eszükbe jutna az, hogy az $X_1 + X_2$ és az X_1X_2 kifejezéseket kell vizsgálni.

Általánosságban a gyökök és együtthatók közötti összefüggések a következő alakban adhatók meg:

Feltéve, hogy $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ az

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

egyenlet gyökei, akkor az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\,a_{n-1} \\ x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= a_{n-2} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\,a_{n-3} \\ &\;\;\vdots \\ x_1x_2\dots x_n &= (-1)^n a_0 \end{aligned}$$

kifejezések a Vičte-összefüggések. A k-adik sor bal oldalán álló kifejezés a gyökök k-adik elemi szimmetrikus kifejezése.

Középiskolás fokon csak n = 2 esetén szerepelnek ezek az összefüggések a tananyagban. Ahhoz, hogy ezt a tételt tanítani lehessen, szükség van bizonyos előzetes ismeretekre. Nélkülözhetetlen, hogy a tanulók tisztában legyenek a megoldóképlet jelentésével, használatának lehetőségeivel. Ennek elérése a korábbi tanítási órák feladata. Mivel a gyökök és együtthatók közötti összefüggések megismerésére szánt tanítási órát megelőző alkalmakkor is volt szó ezekről, elegendő az óra elején ezen ismeretek osztály-szintű összefoglalása. Esetleg az előző órán adhatunk ilyen ismereteket célzó házi feladatot a tanulóknak, így a házi feladat ellenőrzése egyben előkészítésre is alkalmas lesz.

A bizonyítási tevékenység feltétele, hogy a tanulók rendelkezzenek következtetési képességgel, absztrakt fogalmakkal képesek legyenek dolgozni.

A tétel és a bizonyítási ötlet megsejtését konkrét számpéldákkal célszerű kezdeni. Így lehetőségük lesz a tanulóknak a tapasztalatszerzésre. Majd a konkrét számpéldák felcserélhetők olyan feladatokra, melyekben változók szerepelnek. Így gyakorolhatják az általánosítás módszerét. Vagyis azt, hogy a konkrét eseteken szerzett tapasztalataikat megfogalmazzák, és ezt a matematikai szimbólumok segítségével le is írják.

A tétel megsejtetésére elsőként az $X^2 + bX + c = 0$ alakú egyenletekre konkrét b és c értékekkel célszerű számpéldákat megoldatni. A tanulók feladata, hogy vizsgálják az $X_1 + X_2$ és X_1X_2 értékeket. Ha itt megtalálták az összefüggést, akkor megbeszélhető és felír-ható a feladat és a sejtés az $X^2 + bX + c = 0$ általános alakban is. Következő lépés az $aX^2 + bX + c = 0$ alakú egyenletekre vehető konkrét a, b és c értékekkel számpélda. A tanulók feladata megint az, hogy vizsgálják az $X_1 + X_2$ és X_1X_2 értékeket. Ha itt megtalálták az összefüggést, akkor már eredményesen megbeszélhető és felírható a feladat és a „sejtés" az $aX^2 + bX + c = 0$ általános alakban is.

Mindezt azután igazolni is kell (az igazolás a tanulók aktív közreműködésével igazán értékes). Természetesen rögzíteni kell a bizonyítást is. Fontos, hogy felkerüljön a táblára is a matematika nyelvén megfogalmazott, szimbólumok segítségével felírt állítás és az állítás igazolása. Ezen feladat közben nincs szükség új, a tanulók számára eddig ismeretlen szimbólumok bevezetésére, az eddig tanult ilyen irányú ismereteiket kell alkalmazniuk.

Az állítás igazolását úgy célszerű elvégezni, hogy a tanulókat kérdezzük arról, szerintük miként lehetne belátni az állítás helyességét. A megoldóképlet ismeretében nagy valószínűséggel lesz olyan tanuló, aki az egyszerű behelyettesítést javasolja majd. (Mármint hogy a megoldóképlettel megadott gyökök összegét és szorzatát kiszámítva az állításhoz jutunk.) Ez a bizonyítás teljesen korrekt és talán könnyebben átlátható a tanulók számára, mint az, amely a tankönyvekben található. Ha a lehetőségek engedik, hasznos, ha mindkét bizonyítást megismerik a tanulók. Mindkét bizonyítás során a direkt módszert alkalmazzuk.

Első bizonyítás

Vegyük a megoldóképlet alapján a másodfokú egyenletünk két gyökét! Vizsgáljuk ezek összegét és szorzatát! Elvégezve a szükséges átalakításokat az állításhoz jutunk.

Formalizálva;

a megoldóképletből:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ezt alkalmazva:

$$X_1 + X_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$X_1 X_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

A fenti bizonyítás a fordított irányú okoskodás, más szóval az analízis módszerét alkalmazza. E bizonyítási stratégia alapvető kérdése: Miből következik az állítás? Jelen esetben nagy valószínűséggel elegendő a tanárnak a bizonyítandó állítást hangsúlyozni, rögzíteni a tanulókban. Esetleg például olyan kérdéssel segíteni, hogy „Miként kaphatjuk meg, hogyan írhatjuk fel általánosságban az $X_1 + X_2$ és X_1X_2 kifejezéseket?" Ez a visszafelé okoskodás talán nehezebb, de jelen esetben az előző órákon tanult megoldóképletből megkapott gyökök (ha elsajátításuk kellő mértékben megtörtént) a tanulók számára kínálják magukat a bizonyításhoz. Természetesen a bizonyítás a megoldóképlet ismeretét feltételezi.

Második bizonyítás

Az általános alakú másodfokú egyenletet alakítsuk gyöktényezős formába! Ezután algebrai átalakításokat végezve két egyenlő polinomot kell összevetni. A két kifejezés akkor és csak akkor egyenlő, ha az együtthatóik rendre megegyeznek. Ebből már adódik majd az állítás.

Formalizálva:

$$aX^2 + bX + c = 0 \qquad a(X_1 - X_2)(X_1 - X_2) = 0$$

$$a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) = 0 \qquad a(X^2 - X_1X - X_2X + X_1X_2) = 0$$

$$a[X^2 - (X_1 + X_2)X + X_1X_2] = 0$$

A két polinom egyenlő → Együtthatóik megegyeznek →

$$X_1 + X_2 = \frac{-b}{a} \qquad X_1X_2 = \frac{c}{a}$$

Ez a bizonyítási mód a célirányos okoskodás, a szintézis módszerét alkalmazza. Ezen bizonyítási stratégia kiinduló kérdése: „Miből induljunk ki?", „Mi következik a feltételből?"

Nyilván itt teljesül az, amit erről a módszerről tudunk, vagyis hogy a tanulók számára nehéz, nem igazán látják, honnan vesszük a kiinduló lépésünket. Ezért ennél a bizonyításnál nagyobb szerepet kap az, hogy a tanár segítse az elindulást a kezdő lépéssel. A kezdő lépés után, azaz, hogy írjuk fel gyöktényezős alakba a másodfokú egyenletünket, algebrai átalakításokkal már adódik az állítás.

Ez a bizonyítás más jellegű ismereteket is feltételez a tanulóktól, például annak ismeretét, hogy két polinom mikor egyenlő.

Ez a bizonyítás alkalmas az általánosításra harmad-, negyed-, stb. fokú egyenletekre vonatkozóan is.

Miután elvégeztük és matematikai szimbólumok segítségével rögzítettük a tételt és annak bizonyítását, fontos az alkalmazás és alkalmazhatóság bemutatása. Ekkor nyer értelmet az állítás, így fogják megérteni, miért is van szükség ennek az összefüggésnek az ismeretére.

Például:

. A Viète-formula a másodfokú egyenlet gyökeinek gyors ellenőrzésére ad módot. Ezt bemutathatjuk a tanulóknak, ha egy adott egyenlet ellenőrzését elvégezzük helyettesítéssel, majd a formulák segítségével. Be fogják látni, hogy melyik a gyorsabb eljárás. Főleg, ha valamilyen gyökös kifejezést adó értékekkel kell számolniuk.

A Viète-formula kapcsán többször előkerülhet a négyzetösszeg fogalma. Jól begyakoroltatható a tanulókkal a megoldási ötlet, amelyet később esetleg többször is alkalmazniuk kell. Így példát kapunk az azonosságok más jellegű felhasználására is. A négyzetösszeg segítségével mutatható meg igazán jól, miért van szükség arra, hogy csak a nem negatív diszkriminánsú egyenleteket vizsgáljuk.

Példa: Keressük a $2X^2 + 2X + 5 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszegét!

$$X_1^2 + X_2^2 = (X_1 + X_2)^2 - 2X_1X_2 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{5}{2} = 1 - 5 = -4$$

Idő	Az óra tartalmi része	Tanár tevékenysége	Diák tevékenysége	Média
3 perc	Házi feladat ellenőrzése (megoldóképlet használata, eredmények megbeszélése, gyöktényezős alak)	Volt-e gond a feladatokkal	Osztálymunka	
2 perc	Előkészítő feladat: a) $X^2 - 4X + 2 = 0$ b) $X^2 - 8X + 15 = 0$ c) $X^2 + 2X + 2 = 0$ Vizsgáljuk a gyökök összegétű és szorzatát! Mit tapasztalunk?	A feladat ismertetése. Az adatok felírása a táblára. Elindulást segítő kérdések. A feladat megfogalmaztatása matematikai jelekkel	Osztálymunka	Táblakép: a) $X^2 - 4X + 2 = 0$ b) $X^2 - 8X + 15 = 0$ c) $X^2 + 2X + 2 = 0$ $X_1 + X_2 = ?$ $X_1X_2 = ?$
3 perc	Feladatmegoldás	Az egyes diákok munkájának segítése. Egyéni feladatmegoldás		
3 perc	A megoldás, következtetés megbeszélése. A c) feladatnál felmerülő probléma megbeszélése (nem léteznek gyökök, mivel a diszkrimináns negatív)	Az eredmény felírása a táblára. A tapasztalatok megbeszélése	Osztálymunka	
2 perc	Feladat: $X^2 + bX + c = 0$ alakú egyenlet esetén az eredmény általános megfogalmazása	Az eredmény, a megfogalmazás elérésének segítése. Rögzítés a táblán.	Osztálymunka	Táblakép: $X^2 + bX + c = 0$ $X_1 + X_2 = -b$ $X_1X_2 = c$
2 perc	Előkészítő feladat: a) $- X^2 + 8X + 15 = 0$ b) $2X^2 + 8X + 15 = 0$ Vizsgáljuk a gyökök összegét és szorzatát!Mit tapasztalunk?	A feladat ismertetése. Az adatok felírása a táblára. Elindulást segítő kérdések. A feladat megfogalmaztatása matematikai jelekkel.	Osztálymunka	
3 perc	Feladatmegoldás	Az egyes diákok munkájának segítése.	Egyéni feladatmegoldás	
2 perc	A megoldás, következtetés megbeszélése	Az eredmény felírása a táblára. A tapasztalatok megbeszélése.	Osztálymunka	
2 perc	Feladat: $aX^2 + bX + c = 0$ alakú egyenlet esetén az eredmény általános megfogalmazása.	Az eredmény, a megfogalmazásel érésének segítése Rögzítés a táblán	Osztálymunka	Táblakép: $d > 0$ $aX^2 + bX + c = 0$ $X_1 + X_2 = -b/a$ $X_1X_2 = c/a$
3 perc	A Viete-formulákra vonatkozó összefüggés felírása. Külön felhívni a figyelmet arra az esetre, amikor a diszkrimináns negatív.	Az összefüggést a diákokkal megfogalmaztatni. Emlékeztetnia tanulókat az 1/c feladat tapasztalataira.	Osztálymunka	
5 perc	Az állítás igazolása, megoldóképlet felhasználásával.	Az osztálytól várja a bizonyítás ötletét. Utalni a feladatmegoldások menetére.	Osztálymunka	
3 perc	A tétel felhasználásának bemutatása szöveges példán keresztül: Egy terméket két különböző üzletben azonos áron árulnak. Mindkét helyen megváltoztatták a termék árát(egyik helyen növelték,a másik helyen csökkentették) valamennyivel,majd ellentétes irányban kétszer annyi százalék-a. Így mindkét helyen azonos lett a termék ára. Hány százaléka lett így az eredeti árnak a kapott ár, ha tudjuk, hogy egyik üzletben akció keretében 55 százalékos árleszálítással indultak?	A feladat ismertetése. Az adatok felírása a táblára Elindulást segítő kérdések.	Egyéni munka.	
5 perc	Feladatmegoldás	Az egyes diákok munkájának segítése.	Egyéni feladatmegoldás	
3 perc	A megoldás,megbeszélése	Az eredmény felírása a táblára.	Osztálymunka	
2 perc	Összefoglalás	Az új ismeretek összefoglalása a diákok bevonásával.	Osztálymunka	
2 perc	Házi feladat feladása. Viete-formulákkal megoldható egyszerűbb feladatok (tankönyv)	Feladatok ismertetése.		

1. táblázat. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés (óravázlat)

De X_1^2, X_2^2 nem negatív számok. Összegük hogyan lehet negatív?
A hiba ott van, hogy nem vizsgáltuk a diszkriminánst. Ennek az egyenletnek nincsenek valós gyökei, így nem vizsgálhatjuk ezek négyzetösszegét sem.
Szükségünk van az összefüggésre az olyan jellegű feladatoknál is, amelyekben hiányos az egyenletünk, de azért ismerjük valamelyik gyököt, vagy a gyökök arányát. Az ilyen feladatoknál jól mérhető és fejleszthető a tanulók azon képessége, hogy a szövegesen megfogalmazott kapcsolatokat hogyan tudják értelmezni. Így például hogyan írnák fel az alábbi kapcsolatokat: az egyik gyök a másik háromszorosa (általában ez még nem szokott gondot okozni), vagy az egyik gyök tízzel kisebb a másiknál (ennek matematikai felírása annál nagyobb probléma a tanulók számára).
A téma feldolgozási módjának szemléltetésére a következőkben megadom a tananyag beosztásban szereplő két tanítási óra közül az elsőnek az óravázlatát *(1. táblázat)*.

Irodalom

DENKINGER Géza – SCHARNITZKY Viktor – TAKÁCS Gábor – TAKÁCS Miklós: *Matemaikai zseblexikon*. Akadémiai Kiadó – Typotex Kiadó, Bp, 1992. 106., 206. old.

CZAPÁRY Endre: *Matematika a szakközépiskola II. osztálya számára (A, B és D variáns)*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. (3. kiadás) 266-269. oldal.Raktári szám:14202

CZAPÁRY Endre – NÉMETHY Katalin: *Matematika II. (középiskola)*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1997. (17. kiadás), Raktári szám: 14202/1

HAJNAL Imre: *Matematika II. (gimnázium)*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp, 1998. (9. kiadás), 88-96. old. Raktári szám: 13241

KORÁNYI Erzsébet: *Matematika II. osztály (gimnázium)*. Tankönyvkiadó, Bp, 1988. (8. kiadás), 316-321. old. Raktári szám: 13202

Matematika I-IV. osztály. (LASZTÓCZI Gyula szerk.) In: *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve* (SZABOLCS Ottó főszerk.) Tankönyvkiadó, Bp, 1978. 380. old.

AMBRUS András: *Bevezetés a matematika didaktikába*. ELTE Eötvös Kiadó, Bp, 1995.

HAJNAL Imre – NÉMETHY Katalin: *Matamatika I – II. (Tanári kézikönyv, gimnázium)*. Tankönyvkiadó, Bp, 1989.

Nemzeti alaptanterv. Művelődési és Közoktatási Minisztérium, 1995. 81-82. old.