ték szeretni az iskolát és a tanulást. Ugyanis képesek lettek arra, hogy tanuljanak, és arra is, hogy minden tárgyat, amelyet tanítanak nekik, könnyebben elsajátítsák. Egyszerűen érdeklődni kezdtek az ismeretek iránt.

Igen fontos részét képezte a munkának a gyakorlati alkalmazás kiemelt szerepe. A roma lakosság ugyanis etnikai jellegénél fogva gyakorlatias, és emiatt mindig is fogékony volt arra, hogy ismereteit gyakorlati úton sajátítsa el. Így a program során minden elméleti anyagot gyakorlati alkalmazással erősítettek meg, miáltal az ismeretek valóságosan is elsajátíthatók lettek. A tanulás mellett a program részeként egy erkölcsnevelő kurzuson vettek részt a tanulók, amely Az út a boldogsághoz című könyv anyagát dolgozta fel. A könyvecske huszonegy fejezete olyan alapvető erkölcsi problémákat vet fel, amelyek sajnos, igen erősen élnek a cigányság körében. A bűnözés, a drog káros hatásai, a szeretet és a tisztelet fontossága nem mindig érthető és elfogadható irányelv a számukra. Az anyag feldolgozásának különlegessége az volt, hogy a foglalkozáson a diákok csoportosan voltak jelen, a játékos beszélgetések során pedig lehetőséget kaptak arra, hogy saját véleményüket, tapasztalataikat elmondva segítsék felismeréseikkel egymást és az oktatót. A tanulási és erkölcsi nehézségek egységes kezelése itt is meghozta a kívánt eredményt. Nemcsak a tanulási készségek fejlődtek látványosan a gyerekeknél, hanem életfelfogásuk is jelentősen megváltozott. Például később többen jelezték, hogy szeretnének tovább foglalkozni a tanulási technológiával és jegyeiket tovább javítani; s rajzaikon is kitüntetett figyelmet szenteltek a világ dolgainak.

A pszichológiai tesztelés és az IQ-tesztek eredményei jelentős fejlődést mutattak, főleg az erőteljesen lemaradt tanulóknál. Alig két hét alatt átlagosan 15 pontos IQ-növekedést értek el a gyerekek.

Az erkölcsi alapértékek általában helyükre kerültek náluk, megnőtt a tanulási kedvük, emelkedett a műveltségi szintjük.

Természetesen korai lenne még egy ilyen program után hosszú távú véleményt alkotni és általános következtetéseket levonni, de tény, hogy voltak és vannak jól tapintható, szinte azonnali eredményei is.

A gyerekek – a tanárok elmondása szerint – kezelhetőek lettek és fogékonyak a tanulás iránt, s javultak a jegyeik is.

A program azonban ezzel nem ért véget. Azonkívül, hogy még sok-sok gyereknek szüksége van a segítségre, tudnunk kell, hogy hosszú távon csak tanárok adhatják meg nekik a segítséget. Az Alapítvány ez okokból benyújtotta a tanulási technológiát okító tanfolyami anyagot az Országos Pedagógus-továbbképzési Akkreditációs Bizottsághoz minősítésre. Jelenleg a fent említett iskola tizenegy pedagógusa végzi A tanulás akadályai – tanítsuk meg tanulni tanulóinkat című harmincórás tanfolyamot. Hiszen jól tudjuk, hogy minden egyes gyerekért felelősek vagyunk.

Molnár Attila

Felső tagozaton vizsgáltatható szélsőérték-problémák

Matematikai ismeretekkel rendelkező olvasóink többségének a szélsőérték-feladatok megoldásával kapcsolatban az első gondolata nagy valószínűséggel a differenciálhányadosnak a problémák megoldásához történő felhasználása és az általános iskolás életkor ellentmondásának tényéhez kötődik.

Pedig szinte minden olyan maximum–minimum feladat, amelyet rutinszerűen differenciálhányados alkalmazásával oldanak meg a felsőbb iskolai szinteken, elemi módszerekkel is megoldható. Sőt, jól képzett matematikusok sem tudnak könnyen olyan szélsőérték-problémát felvetni, amelyet ne lehetne megoldani elemi úton, ráadásul leggyakrabban az analízis módszereinek felhasználásával készült megoldásnál lényegesen egyszerűbben. Elemi módszerek alkalmazásakor a differenciálszámítás szélsőérték vizsgálati módszerének általános, nemegyszer sablonos használata jól pótolható az elemi matematika különböző területeiről megfelelően választott egyenlőtlenségek felhasználásával, miként ezt *Hódi Endre* tizenegy A/5-ös ív terjedelmű munkájában *(1)* rendkívül tanulságosan megmutatja.

Mivel elemi szinten nincs általános módszer, másrészt az elemi matematika alkalmazható egyenlőtlenségeinek száma lényegében korlátlan, a szélsőérték-feladatok megoldása egyedi problémaként vetődik fel. Ezért a szélsőérték-problémák elemi úton történő megoldásai különösen alkalmasak a logikus gondolkodás és az önálló problémamegoldás készségének fejlesztésére.

Az egyenlőtlenségek – mint nyitott mondatok speciális esetei – már az általános iskolások matematikai ismeretszerzésének is tárgyát képezik. Bár a minimum és a maximum kifejezések használata helyett az alapfokú oktatásban e kifejezések szinonimáinak a mindennapi életben elterjedt változatai kapnak nagyobb hangsúlyt (általános iskolások esetén a matematikában is). Ezek a gondolkodási készség fejlesztésének nélkülözhetetlen eszközei valamennyi alakjukban.

A legfontosabb, matematikai szövegkörnyezetben is korrekt szinonimák:

Minimum: legalább, legkevesebb (legkisebb), nem kevesebb (nem kisebb), több vagy egyenlő (nagyobb vagy egyenlő).

Maximum: legfeljebb, legtöbb (legnagyobb), nem több (nem nagyobb), kevesebb vagy egyenlő (kisebb vagy egyenlő).

A „nem kisebb" (nagyobb vagy egyenlő) és a „nem nagyobb" (kisebb vagy egyenlő) relációk előfordulásakor igyekezzünk egyre gyakrabban használni a „legalább", „legfeljebb" kifejezéseket. Tanítványainknak mindennapi életükben inkább ezekre lesz szükségük. Természetesen csak jelentésük tudatosítása mellett van értelme e kifejezéseket használnunk. Tudatosításuk viszont a tantervi követelmények teljesítéséhez nélkülözhetetlen. Erre csak egyetlen konkrét példát említve: a kerekített értékek kettős egyenlőtlenséggel való kifejezésekor nélkülözhetetlen a „nagyobb vagy egyenlő" relációk használata.

A matematikában elengedhetetlen precíz, egyértelmű fogalmazásra való nevelés igénye és a maximum, minimum kifejezések, valamint szinonimáiknak a mindennapi életben (a matematikai környezetben is!) gyakori használata a tankönyvekben előforduló eseteknél talán több figyelmet igényelne. Hiszen a legnagyobb példányszámban használatos felső tagozatos matematikatankönyveket tekintve a függvények értelmezése, vizsgálata anyagrészben a szélsőérték fogalma az „emelt szintű" tankönyvben csak egy helyen, a Tudáspróba egyik feladatának kérdéseként („Mikor volt a legmelegebb?") fordul elő, *(2)* illetve nyolcadik évfolyamon a Néhány nem lineáris függvény vizsgálatakor két függvénynek kerül szóba a minimuma, bár a kidolgozott példák között szereplő abszolútérték-függvénynek is nyilván van minimuma. *(3)*

Természetesen a szélsőérték-feladatok vizsgálatát, megoldását nem öncélú problémafelvetésként javaslom, hanem más témarészletek tananyagának feldolgozásához, illetve a mindennapi életből választott gyakorlatias problémák megoldásához kapcsolva. A nem kisebb (legalább) és a nem nagyobb (legfeljebb) relációt tartalmazó feladatok már ötödik évfolyamon természetes részeit képezhetik a matematikai ismeretszerzésnek, hiszen az egyenlőtlenséggel felírható nyitott mondatok szöveges megadásának gyakran előforduló kifejezései a „legalább", a „legfeljebb" szavak, illetve szinonimáik. Sok egyszerű, de mégis tanulságos feladat megfogalmazható *(4)* ebben a témarészletben. Példaként kettő ilyen feladatot mutatva:

1. Legalább hány darab pénzre van szükség 2657 Ft kifizetéséhez?

Aki azt gondolja, hogy egy darabra, egy ötezer forintosra, az nagyon téved, mert a visszajáró (5000–2657 =) 2343 Ft biztosításához 1 x 2000 Ft + 1 x 200 Ft + 1 x 100 Ft + 2 x 20 Ft + 1 x 2 Ft + 1 x 1 Ft, azaz 7 db bankjegy (papírpénz), illetve pénzérme (fémpénz), valamint 1 db „ötezres”, így összesen 8 db kellene.

A felhasznált bankjegyek és pénzérmék darabszámának összege akkor minimális (legalább!), ha az összeget így bontjuk fel:

1 x 2000 Ft + 1 x 500 Ft + 1 x 100 Ft + 1 x 50 Ft + 1 x 5 Ft + 1 x 2 Ft.

A legnagyobb névértékű pénzből kell először a lehető legtöbbet kiválasztani, majd a még megmaradó összegeknél a következő (előzőnél kisebb) névértékkel ezt újra, meg újra megismételni.

2. Egy üzlet pénztárosa 53 600 Ft-ot vitt a postára pénztárzárás után. Mennyi lehetett a bevétel, ha egyik napról a másikra a kasszában legfeljebb 2500 Ft váltópénz maradhat?

A bevétel nagyságának meghatározásához nem szabad elfelejtenünk, hogy nemcsak a következő napra maradhat 2500 Ft a kasszában, hanem az előző napról is lehet ennyi váltópénz nyitáskor a kasszában.

A bevétel alulról becsülve:

– előző napról 2500 Ft maradt a kasszában,

– következő napra nem hagynak váltópénzt.

Ezekkel a feltételekkel kapjuk a bevétel minimumát, azaz legalább

51 100 Ft volt a szóban forgó napon a bevétel.

A bevétel felülről becsülve:

– előző napról nem maradt pénz a kasszában,

– következő napra hagytak 2500 Ft váltópénzt.

Ezekkel a feltételekkel kapjuk a bevétel maximumát, azaz legfeljebb 56 100 Ft volt a szóban forgó napon a bevétel.

Az önálló problémamegoldás készségének fejlesztésére a fentieknél igényesebb feladatokat is kitűzhetünk. Erre példa a következő, egy-egy algebrai és geometriai probléma.

3. Miként kell egy számot két részre bontani úgy, hogy a részek összege a felbontott számmal legyen egyenlő, a részek szorzata pedig a lehető legnagyobb legyen?

Ha a felbontandó számot 2a-val jelöljük, és egyik résznek (a + x)-et választva, akkor a másik rész nyilván (a – x) lesz. Ezek szorzata a két tag összegének és különbségének szorzatára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$(a + x)(a - x) = a^2 - x^2$.

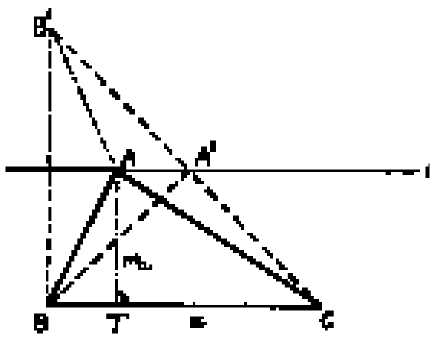
Minden valós x esetén az

$a^2 - x^2 \leq a^2$

igaz, sőt az egyenlőség csak az x = 0 esetén fordulhat elő. A felbontandó szám állandó, így fele, azaz *a* is állandó. Ezek szerint a részek szorzata akkor maximális, ha a részek egyenlők. Vagyis éppen felezni kell a felbontandó számot. Ennek az algebrai problémának geometriai értelmezései is léteznek, például: egyenlő kerületű téglalapok közül a négyzetnek legnagyobb a területe.

4. Adott alapú és magasságú háromszögek közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

A feltétel szerint az a = BC alapú, m_a = TA magasságú háromszög a oldallal szemközti A csúcsa az ábrán t-vel jelölt egyenesen mozoghat. A t egyenes párhuzamos az ABC háromszög BC oldalával.



A háromszög AB + BC + CA kerülete akkor a legkisebb, amikor a BA + AC oldalösszeg a legkisebb, mert BC = a állandó értékű a feladat feltétele szerint. A t egyenesre, mint tükörtengelyre B-t tükrözve, annak tükörképe B’ lesz, így a tengelyes türközés alaptulajdonsága (hosszúságtartó) miatt B’A = BA. A feladat feltétele szerint B, C, B’ pontok helye rögzített, független az A csúcspont választásától. A háromszög kerülete akkor lesz minimális, ha a

B’A + AC összeg minimális. Mivel bármely háromszög két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldala a háromszögnek, azért ez az összeg akkor minimális, ha az A csúcs a B’C egyenesre illeszkedik. Ebben a helyzetben az A csúcsot A’ jelöli az ábrán. Viszont a t tükörtengely nem csak a BB’ szakaszt felezi, hanem a CB’ szakaszt is, ezért B’A’ (= BA’) = A’C, azaz A’BC háromszög egyenlő szárú (alapja a BC szakasz). Ezek szerint egyenlő alapú és területű háromszögek (ha az alaphoz tartozó magassága is megegyezik a háromszögeknek, akkor nyilván területük is) közül annak a kerülete a legkisebb, amelyiknek a másik két oldala egyenlő.

E cikk témáját érintő huszonöt konkrét feladat található a Módszertani Közlemények 1991. évi 5. számában. *(5)*

(1) HÓDI ENDRE: *Szélsőérték-feladatok elemi megoldása.* Typotex Kiadó, Bp. 1994.
(2) DR. CZEGLÉDY ISTVÁN–DR. CZEGLÉDY ISTVÁNNÉ–DR. HAJDU SÁNDOR–NOVÁK LÁSZLÓNÉ–DR. SÜMEGI LÁSZLÓNÉ: *Matematika EMELT SZINT Általános Iskola 7. osztály, hatosztályos gimnázium 1. osztály, nyolcosztályos gimnázium 3. osztály.* Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1998, 135. old.
(3) DR. CZEGLÉDY ISTVÁN–DR. CZEGLÉDY ISTVÁNNÉ–DR. HAJDU SÁNDOR–NOVÁK LÁSZLÓNÉ–DR. SÜMEGI LÁSZLÓNÉ–SZALONTAY TIBOR: *Matematika EMELT SZINT. Általános iskola 8. osztály, hatosztályos gimnázium 2. osztály, nyolcosztályos gimnázium 4. osztály.* Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1998, 155., 156. old.
(4) TAKÁCS GÁBOR: *Magánórák algebrából 5. osztály. I.* UNIÓ Kiadó, Bp. 1993, 16–35. old.
(5) TAKÁCS GÁBOR: *Legalább–legfeljebb az alapfokú matematika tanításában.* Módszertani Közlemények, 1991. 5. sz., 284–288. old.

Takács Gábor

Lakatos Imre kísérletei a tudomány racionalitásának megmentésére

Lakatos Imrét (1922–1974) az anarchista barát és ellenfél, Paul Feyerabend a racionalizmus utolsó nagy formátumú védelmezőjének, „furcsa és kellemetlen századunk legjobb tudományfilozófusának” nevezte. Zavarba ejtő, ellentmondásos, de őszinte elismerés ez.

Lakatos egyaránt érzékeny a logikai-metodológiai megfontolásokra és a tudománytörténet eseményeire. Úgy volt kénytelen védeni a racionalizmust, hogy ezzel – ő mondta így – barátaiból (a racionalistákból) ellenfeleket csinált, és megfordítva. Miközben nyíltan *Karl Popper* követőjének vallotta magát, a mester fanyalogva szólt róla, s árulónak tartotta (mondják, Popper nehezen viselte Lakatos kritikáját), ugyanakkor *Polányi Mihály, Hans P. Duerr* vagy Feyerabend több alkalommal elismeréssel nyilatkoztak Lakatos filozófiájáról. *Forrai Gábor* Lakatos tudományfilozófiáját bemutató tanulmányában találóan jellemezte ezt a helyzetet: „…keveseknek voltak olyan mély meglátásai a tudománnyal kapcsolatban, mint Lakatosnak, s ugyanakkor kevesen követtek el hozzá hasonló durva hibákat. (…) Egyes olvasói pontosan azt tartják forradalmi felismerésnek, ami mások szerint ostobaság.”

De nemcsak gondolatai, illetve kortársainak róla alkotott véleménye volt ellentmondásos, hanem az életét is ilyen ellentmondásosság terhelte: fiatal korában harcos és hívő kommunista (illegális antifasiszta, később agitátor és besúgó) volt. Aztán, mint sokan mások akkoriban, kegyvesztett, de a mozgalomhoz még mindig hű recski munkaszolgálatos lett, s végül kiábrándult antikommunista, aki 1956 után külföldre távozott, ahol mindenféle totalitarizmus ellen felemelte szavát, s aki a tudomány szabadságát is igyekezett védelmezni, amit persze Feyerabend a tudomány totalitarizmusának minden alapot nélkülöző védelmezéseként interpretált: „Miért a tudo-