

„Ukasar-urapon, aháge tokále, bulan guliba”

Fejezetek a számrendszerek történetéből

Szinte nincs olyan perc az életünkben, amikor ne kerülnénk kapcsolatba számokkal. Számokkal ébredünk, mindennapjainkat számok hálója szövi be, s velük hajtjuk álomra fejünket. Ez természetes, hiszen a számok világában élünk. Néha idegenül bolyongunk ebben a világban, pedig mi, emberek alkottuk meg...

A számfogalom és a számolás megjelenése

A számrendszerek kialakulásának előfeltétele a számfogalom és a számolás (összeszámlálás) volt, míg a számírás megjelenése már szervesen kapcsolódik a rendszerek történetéhez. Egyértelmű, hogy az első lépésnek a számfogalom kialakulásának kellett lennie. Természetesen csak viszonylagos időpontot tudunk adni ennek datálására. A régészet és a nyelvészet segítségével hívásával biztos állíthatjuk, hogy ez az esemény a neolitikumot („csiszolt kőkorszak”: i. e. 10 000–3500) megelőző évezredekben, azaz a paleolitikumban zajlott le. (1)

A számfogalom előmozdítójaként a leggyakrabban a termelést és az egyre általánosabbá váló cserét (majd kereskedelmet) szokták említeni. Van olyan elképzelés is, mely a számolásnak rituális eredetet tulajdonít. (Az ősi rítusokban a szereplők és a történések meghatározott sorrendben követték egymást.) Szerepelhet a számfogalom kialakulásának „bábaasszonyaként” az időszámítás, ugyanis a legtöbb primitív nép a napok egymásutánosságának felismerésével, naptárak készítésével igyekezett megragadni a múltó időt. A rítusokhoz hasonlóan ez is inkább a sorszámneveket helyezi a figyelem középpontjába.

A számlálásnak mint az egyik legprimitívebb matematikai tevékenységnek is van gyökere: olyan tevékenység, amely során véges elemszámú halmazokat hasonlítunk össze. Ezen összehasonlítási képesség kialakulása már az ősember idejében elkezdődhetett. Megjelentek az egyszerű matematikai fogalmak (egyenlő, több, kevesebb, kisebb, nagyobb stb.). A rendkívül hosszú folyamat végén tűnt fel az absztrakt számnév.

De térjünk vissza a kezdetekhez!

Őseink eleinte csak az „egy”, a „kettő” és a „sok” között tettek különbséget (ennek emléke például az ógörög és a kelta nyelv azon sajátossága, hogy ezekben az egyes és többes szám mellett „kettes szám” is van; sőt, néhány óceániai nyelv még a „négyes számot” is ismerte. (2) Az egyik legkezdetlegesebb számolási módszer ennek megfelelően az ún. kettes számolás volt, melyet még ma is használnak latin-amerikai indián és ausztrál bennszülött törzsek. Számaik két számnév kombinálásából születnek.

Például:

a) 1 = urapon, 2 = ukasar, 3 = ukasar-urapon, 4 = ukasar-ukasar;

b) 1 = tokále, 2 = aháge, 3 = aháge tokále, 4 = aháge aháge.

Az ennél nagyobb számokat egyszerűen „sok”-nak nevezték. (3)

A primitív törzsek nyelvének tanulmányozása fontos adatokat nyújt a „neolitikumi matematika” fejlettségére vonatkozóan. Ismert utazóknak – elsősorban *Mungo Parknak* és a

múlt században élt *von den Steiennek* – köszönhetünk sok érdekes, ezzel a problémával kapcsolatos feljegyzést. (4)

Az előzőekben bemutatott módon épülhettek fel az első, kettes számrendszerek is. A fejlődés következő lépcsőfokaként megjelent számnévként a ‘három’, majd e számra is primitív rendszer épült. Ezt követte az egyre nagyobb és nagyobb számok (azaz a természetes számok sorozatának) fokozatos kialakulása. Ez tekinthető az utolsó lépcsőfoknak, mely elvezetett a számolás matematikai tevékenységének általánossá válásához.

A kettes számolás mellett elterjedt volt a testrészeken történő számolás is. Először csak egyik kezének ujjait használta erre a célra az őseMBER, majd szinte egész testét „számológéppé” alakította át. Ismerünk olyan 20. századi indián törzseket, melyek a számolást a bal kéz kisujján kezdik, majd folytatják a bal kéz ujjain, a bal karon, a bal vállon, a mellcsonton, a jobb félttest hasonló részein át egészen a jobb kéz kisujjáig. (5) Azonban a termelés növekedésével, és az árucserre fokozódásával az emberi test által nyújtott számolási lehetőségek kimerültek. A számok kialakulásának – azaz a természetes számsorozat növekedésének – üteme sem érthette el a szükséges szintet. Többek között ezért is vált szükségesé a számok csoportosítása, egyre nagyobb és nagyobb egységekbe foglalása. Nagyobb számú tárgy megszámlálása már csak többszörös csoportosítás segítségével történhetett. Természetesen az egyes törzseknél a csoportosítás elve más-más volt (például az eltérő „testszámolási gyakorlatnak” köszönhetően). És mivel sok számrendszer a testrészeken való számolásból alakult ki, a törzsek csoportosításon alapuló számolása (a különböző csomószám miatt) kaotikus képet mutatott. Sőt, az is általános jelenség, hogy egy-egy nép történelme során többféle számrendszert is alkalmazott.

Rendszerbe foglalt számok

A számírás a hatalmas folyók mentén kialakuló ókori birodalmakban jelent meg, ahol az első számrendszerek is megszülettek.

Igen ritka jelenségnek tekinthető, ha valamely nép története során egyetlen – vagyis állandó csomószámú – rendszert használt. Nagyon jól nyomon követhető, hogy az alkalmazott számrendszer az adott néppel együtt változott, fejlődött. Ráadásul olyan esetekről is tudunk, mikor egymás mellett többféle számrendszer is létezik ugyanabban a kultúrában!

E néhány tényből is érzékelhető a számrendszerek történetének lüktetése, sokszínűsége. A napjainkban világszerte használatos helyiértékes tízes számrendszer több évezredet felölelő folyamat eredménye. (Nem kell sokat töprengeni, hogy megállapítsuk: a folyamat eredménye ugyan, de nem záróköve...)

A számrendszerek igen nagyfokú tarkasága szükségessé teszi csoportosításukat.

Hieroglifikus számrendszerek

A legősibb számrendszerek túlnyomó többsége hieroglifikus. Az ilyen számrendszerek csomószámokra épülnek (ezek a 10-es számrendszerben: 1, 10, 100, 1000 stb.). Minden csomószámot önálló szimbólummal (hieroglifával) tüntettek ki. A többi számot (az ún. algoritmikus számokat) úgy jelölték, hogy a megfelelő csomószám egyik vagy másik oldalára (esetleg alá vagy fölé) egy másik csomószámot írtak, majd ezt az eljárást ismételtették. Többek között az egyiptomi, krétai, attikai, római, ókínai, óhindu, szíriai és azték számírásmód jellemezhető a „hieroglifikus” jelzővel.

a) Az ókori Egyiptomban használt számrendszerre (és általában az akkori matematikára) vonatkozó ismereteink két, a Középbirodalom korára (i. e. 2040–1785) datálható papirusztekercsből, a Rhind- és a Moszkvai-papiruszból származnak. (6) A matematikatörténeti vizsgálatok kimutatták, hogy a papiruszokon található ismeretek korábról, az i. e. 3. évezredből valók. Annyi bizonyos, hogy i. e. 2000 környékén az egyiptomiak már jól kialakult helyiérték nélküli tízes számrendszert használtak. A helyiérték hiánya miatt min-

den tízes egység (a csomószámok) jelölésére külön hieroglifát használtak. Az egyes jele a függőleges „pálcika” volt. 1-től 9-ig a számokat a megfelelő számú pálcika egymás mellé rakásával írták. A 10 jele a „halom”, a 100-é a „kígyó”, az 1000-é a „lótuszvirág” volt. (7) Ezek a jelek az idők folyamán persze változtak. Számrendszerüket egymillióig építették ki (ennek jele egy feltartott kezű emberalak volt). Minden műveletet az összeadásra vezettek vissza, így az összeadási elv érvényesült a számok olvasásában is.

A hasonló típusú számrendszereket – tehát amelyekben a csomószámokat külön jellel tüntették ki, és azokat egymás mellé írták, a számok kiolvasása pedig az összeadási elv szerint történt – az egyiptomi nyomán nevezték el „hieroglifikus rendszereknek”.

b) A római számjegyek keletkezésének körülményeit nem ismerjük pontosan. Eredetükre csak valószínű és kevésbé valószínű elképzelések vannak. (8) *Theodor Mommsen* (1817–1903) történelem szerinti a rómaiak által használt számjegyek görög és etruszk (tehát vegyes) eredetűek. Néhány jelet görög betűkből származtatott, az etruszk eredetet pedig egyes régi római és etruszk számjegyek hasonlóságával igyekezett indokolni.

Egy másik elmélet kizárólag az emberi kezek különböző helyzeteiből vezeti le a római jeleket (I, X, L, V). Az előzőhöz hasonlóan ez is vitatható.

A legvalószínűbb magyarázatot *Karl Zangemeister* adta meg a múlt században. Szerinte az 1-től 9-ig terjedő számokat kezdetben annyi függőleges vonallal jelölték, ahány egységről volt szó, a tízeseket pedig úgy ábrázolták, hogy a megfelelő számú vonalat keresztben áthúzták (I = 1, de X = 10). Az X jel felezésével létrehozta egy újabbat (V), ennek értéke 5 lett. Ezekből alakultak ki azután folyamatos változással (pl. egyszerűsödéssel) a további jelek.

A római számjegyek végső rendszere az ötös és a tízes számrendszer keveredését mutatja. Hieroglifikus, hiszen a csomószámoknak önálló hieroglifájuk volt, és számaik leírásánál általában az összeadási elvet alkalmazták. (CCLVIII = 258). Azonban a jelek gyakori ismétlésének elkerülésére használták a kivonás elvét is, mely szerint: ha egy kisebb értékű jel megelőzött egy nagyobb értékűt, akkor a nagyobból ki kellett vonni a kisebb számot (CCXCIV = 294).

Ezzel a számírással nehézkes volt a számolás, ezért a gyakorlati jellegű számításokat a római hivatalnokok az abakusz ('abacus': számolóasztal) segítségével végezték.

c) Az attikai számírás is a hieroglifikus számrendszerek csoportjába tartozik. A legkorábbi számírási emlékek az i. e. 1500 körüli évekből való agyagtáblák, melyek a műkénéi kultúrában használatos ógörög számjegyeket tartalmazzák. A számjegyek tízes számrendszer jelenlétére utalnak. Egymás mellé írták a jeleket, balról kezdve a legnagyobb, értéküket pedig össze kellett adni.

Az első ténylegesen görögnek nevezhető számírás az attikai volt. A rendszer a rómaihoz hasonlóan az ötös és a tízes számrendszer keveredésére utal. Az attikai számjegyek „pályafutása” az i. e. 8. századtól az i. u. 1–2. századig terjedő intervallumot öleli fel. Előnyei közé sorolhatjuk a kevés számjegyet. Azonban ebből következik egy hátránya is: a számok leírt alakja igen terjedelmes volt. Az egyes számjegyek a megfelelő számok első betűi voltak. Így az a számírás már egy fontos lépés az ún. alfabetikus számírásmód felé.

Alfabetikus számrendszerek

Ebbe a csoportba tartoznak azok a rendszerek, melyekben a számokat az ábécé betűivel jelölték. Általában mindez oly módon történt, hogy az ábécé első kilenc betűje az egyeseket, a következő kilenc darab betű a tízeseket, míg az utolsó kilenc betű a százásokat jelölte. Minden egyes betűt speciális jellel (gyakran felülvonással) láttak el, így utalva arra, hogy egy-egy számot takarnak. Ha az ábécében nem volt elég betű, akkor pótbetűvel vagy egyéb jelekkel egészítették ki a készletet. (9)

Az alfabetikus rendszer előnye, hogy segítségével a számok röviden írhatók le. Azonban a nagy számokkal végzett műveletek nehézkesek voltak, és a számrendszerek „meg-

jegyzése” sem lehetett egyszerű feladat. Alfabetikus számrendszer például az ion, a héber, az ószláv, a kopt, az arab, a gót, az örmény és a grúz nép régi számrendszere.

a) A héber számírással vonatkozó első lelet a Makkabeus korból származik: egy érmén a zsidók már ábécéjük betűivel jelölték a számjegyeket (i. e. 139). (10) Helyiérték nélküli tízes számrendszerükben 400-ig vezettek be jelöléseket. 500-tól felfelé a százásokat jobbról balra olvasva fejezték ki. Az ezrest újra az egyes jelével írták, két ponttal különböztetve meg attól.

Az évszázadok alatt számjegyeiknek három formája alakult ki: az óhéber, a négyzetes (kvadrát) és a kurzív (rabbinikus) típus.

b) Az ion számírást is az alfabetikus rendszerek között említettem. Az ókori görögök-nél az attikai hieroglifikus számírást követően, az ábécé kifejlődésével párhuzamosan megjelent a számok alfabetikus írásmódja is. (11)

A görögök a főníciaiak ábécéjét vették át, de több helyen is megváltoztatták a sémi betűket. Az új betűírást hosszú ideig szinte kizárólag csak a tudósok használták (a kereskedők például megtartották az attikai számrendszert).

Az ion Milétosban i. e. 700 körül jött létre az a számjegyrendszer, mely az alfabetikus sorrendben megadott betűk mindegyikéhez hozzárendeli az egyeseket, a tízeseket vagy a százásokat. 900-ig tudták leírni a számokat, hiszen 27 betűt használtak. (Ebben is különbözik a „milétoszi számábécé” a 24 betűs klasszikus ion ábécétől.) A betűiktől való elkülönítés céljából kis vonalakat húztak a jelek fölé, vagy pedig lefektették azokat. Az ezresek újra az ábécé első betűivel jelölték, de az adott betű bal oldalára apró vesszőt tettek. Az ionok eleinte „csak” 10 000-ig építették fel rendszerüket, hiszen azt tartották a legnagyobb számnak. Később a nagyobb számok leírására bevezettek egy különleges jelet, mely a szám fölé írva az aktuális szám tízezerszeresét jelentette.

Leszögezhetjük, hogy a milétosziak számírása igen konzekvens volt, bár eleinte nem tudtak igazán kényelmesen számolni segítségével. Ennek ellenére a görögök alfabetikus írásmódja elterjedt és hosszú időt ért meg. Bizánban egészen 1453-ig érvényben volt.

Helyiértékes nem tízes számrendszerek

Ebben a fejezetben megismerhetjük a babilóniaiak helyiértékes hatvanas számrendszerét, és szó esik néhány más alapszámú (de nem feltétlenül helyiértékes!) rendszerről is.

Mezopotámia fordulatokban gazdag történetét a nagy mennyiségben feltárt ékírásos agyagtáblák tartalmára támaszkodva viszonylag jól nyomon követhetjük. (12) A számrendszerek történetében folytatott bűvárkodásunk az i. e. 4–3. évezredekben e területen élt sumér (majd az akkád), és a következő évezred küszöbén az Óbabiloni Birodalmat megalapító amoriták népéhez vezet minket.

A helyiértékes jelölést a Tigris és az Eufrátesz folyók vidékén megelőzte egy nem helyiértékes számírás. Ez az ósumér számjegyek rendszere, mely az i. e. 4. évezredből származik. (A napjainkig feltárt számírások közül ez a legrégebbi.) Az írásmód még a képirás körébe sorolható, ám az ékírásra való áttéréssel a számjegyek is sokat változtak, egyszerűsödtek. A múlt században régészeti leletként felszínre kerülő agyagtáblák tanúsága szerint az i. e. 3. évezredben a sumérek (és az akkádok) már helyiértékes számrendszert használtak (mely a tízes és a hatvanas rendszer keveredését mutatta), így joggal tekinti őket a tudomány a „helyiérték megalkotóinak”. (Elsőként *Loflus* – angol geológus – ássott ki két, az i. e. 2300 és 1600 közötti korszakból való matematikai táblát 1854-ben). (13) Rengeteg emlék utal arra is, hogy a sumér kultúrával együtt (illetve annak részeként) a számrendszerüket is átvették az amoriták.

Számrendszerük alapja a 60 volt, de használtak tízes csoportosítást is. A hatvanas alapszám eredetét sokan fürkészték, több hipotézist felállítva. (14) Sokan e számrendszer gyökerét a csillagászatban vélték meglelni; egy másik elképzelés szerint azért választották a hatvanat alapnak, mert sok osztója van (a méréssel kapcsolatos részekre osztás miatt fontos ez), a felét és a harmadát is osztja a tíz, és mindemellett viszonylag nem nagy szám.

A leginkább elfogadott (és tudományosan nagyrészt megalapozott) magyarázat szerint az akkádok színre lépésekor az egységes állam létrejöttéhez szükség volt a sumér és az akkád pénzrendszer és súlymérték egyesítésére. A sumér pénzrendszer egysége – a mina – hatvanszor annyit ért, mint az akkádok sekel nevű egysége: 1 mina = 60 sekel. Az idők során megjelent a talentum is, melynek értéke: 1 talentum = 60 mina = 60 x 60 sekel.

A számok írását két jel, a rovás (függőleges ék) és az ék („sarokpánt”, fekvő ék) felhasználásával oldották meg. A rovás 1-et, az ék 10-et jelentett (ez például a 10-es számrendszer egykori jelenlétére utal). Egytől kilencig minden számot a vele egyenlő számú rovás jelölt; 10-től 59-ig annyi éket írtak, ahány tízes, és annyi rovást, ahány egyes volt az illető számban. Így a jelek értékét az összeadási elv szerint számolták. A 60-at és annak minden pozitív egész kitevős hatványát újra az 1 (rovás) szimbólumával jelölték! (Ez volt a döntő lépés a helyiérték elvének megjelenéséhez.) A 60-nál nagyobb számokat így már a helyiérték elvének megfelelően írták, balról jobbra csökkenő értékű hatvan-hatványok összeadásával. A helyiértékes írásmódot ráadásul az egyesek helyétől jobbra is folytatták (így „hatvanados törtekhez” jutottak – a mi tizedestörtjeinkhez hasonlóan).

A babilóniai matematikát a magas fokú számológépszerűség jellemezte: számírásukra fejlett aritmetikát és algebrát építettek fel. Ez a helyiérték elvének köszönhető.

Az alábbi számrendszerek nem mindegyikéről mondható el, hogy helyiértékes, azonban mind a számrendszerek történetének egy-egy rövid fejezetét érezheti magáénak:

– Az ötös rendszerre jellemző, hogy általában keveredik a tízessel (például a római számok esetén) vagy a húszassal. Néhány primitív dél-amerikai törzsnél „vegytiszta” állapotban is megtalálható.

– A hatos számrendszer egyes észak-afrikai törzseknel lehetséges fel, gyakran a tizenkettes társrendszereként. Nyelvészeti kutatások szerint a finnugorok is rendszeresen használták egykor.

– A hetes számrendszer az egyik legérdekesebb. (15) Gyakori volt Afrikában, a Közel-Keleten, valamint az ugor népeknél. A hetes szám több afrikai népcsoportnál ma is misztikus szereppel bír. Tabunak tekintik, „hat meg egy” alakban mondják ki. Nemcsak az etimológia, hanem az építészettörténet is meglepő eredményeket szolgáltat e tekintetben: a sivatagi berberék ősi, földbe épített agyagvárosának többek között hét kapuja, hét bástyája, hét tere van!

A Közel-Keleten a héberek hetes számrendszerének emlékét vallási kultuszuk és a Biblia őrzi. ‘Esküdni’ nyelvükben ‘nisba’, melynek jelentése: önmagát meghétszerezni. Valamit hétszer végezni annyi, mint tökéletesen végrehajtani (pl. hétszeres bosszú). A nagy ünnepek hét napig tartanak (templomszentelés). Engesztelő áldozat bemutatásánál hét állat vérének hét-szer hintették. A Jelenések Könyvében is kitüntetett szerepű a hetes szám. Istennek hét szeme van, hét darab pecsét, trombita és szentség van. Isten hét nap alatt teremtette a világot. Hét szűk esztendő hét bő követ. Húsvét és Pünkösöd között pontosan 49 (hétszer hét) nap van.

A finnugorok együttélésük folyamán feltehetőleg még hatos alapszámú rendszert használtak. A hetes számrendszer már a szűkebb ugor ágra utal. Az ugor népek nyelvében a ‘hét’

A helyiérték hiánya miatt minden tízes egység (a csomószámok) jelölésére külön hieroglifát használtak. Az egyes jele a függőleges „pálcika” volt. 1-től 9-ig a számokat a megfelelő számú pálcika egymás mellé rakásával írták.

A 10 jele

a „halom”, a 100-é a „kígyó”, az 1000-é a „lótuszvirág” volt.

Ezek a jelek az idők folyamán persze változtak. Számrendszerüket egymillióig építették ki (ennek jele egy feltartott kezű emberalak volt). Minden műveletet az összeadásra vezettek vissza, így az összeadási elv érvényesült a számok olvasásában is.

nemcsak számnév, hanem a hétnapos időtartamot is jelenti. A nyelvész *Hunfalvy Pál* szerint a hetes számrendszerre lehet következtetni többek között a regék és mesék hétfejű sárkányáról, a hétmérföldes csizmáról és a hétpecsétes titokról is. Az ősi ugor hitvilágban sűrűn előfordul ez a szám. A legfőbb isten a hetedik mennyországban lakozik, de a pokol is hét rétegű. Az ördög öreganya hétszázhetvenhét éves.

– A húszas csoportosítás elve időszámításunk kezdete körül jelent meg Közép-Amerikában, az olmékok kultúrájában. Tőlük vette át egy másik virágzó civilizációjú nép, a maya. Ők eljutottak a helyiérték elvének felismeréséig is. Három „számjegyet” használtak: a pontot, a vízszintes vonást és egy, a nulla szerepét betöltő, emberi szemre emlékeztető alakzatot. Helyiérték-rendszerük nem volt következetes, hiszen a húsz utáni egység nem a 20×20 , hanem a 20×18 volt. E törés után visszaállt a szabályosság. A további egységek a $(20 \times 18) \times 20$, $(20 \times 18 \times 20) \times 20$ stb. voltak. A maya számírás nem volt általánosan elterjedt, a későbbiekben is a tudományt hordozó papok számírása maradt.

– Kínában az i. u. 1. században alakult ki – a körülbelül már egy évezrede használt nem helyiértékes tízes számrendszer mellett – egy 19 számjegyet (0–9 és 10–90) tartalmazó helyiértékes százas rendszer.

A helyiértékes tízes számrendszer

Az eddig ismertett számrendszerek közül több is a 10-es alapszámra épült. A római, sumér, babilóniai, kínai, egyiptomi számírás is magán hordozta a tízre alapuló csoportosítás elvét. A napjainkban általánosan használt helyiértékes tízes számrendszer megalkotóinak mégis a hindu matematikusokat tekinthetjük. Érdekes továbbá az is, hogy e számrendszer i. u. 500 környékére alakult ki teljesen, holott akkor a tízes csoportosítás (és a helyiérték!) elvét már több ezer éve ismerte az emberiség... Mindennapjaink számrendszerre valójában „nemzetközi alkotás”. *Sain Márton* így fogalmaz Nincs királyi út! című művében: „...az Indiában született brahmi számjegyek, a Mezopotámiában létrejött helyiérték-fogalom és a görög vagy kínai nulla használata Indiában állt össze a helyiértékes, 10-es alapú számírássá, amely aztán arab közvetítéssel világszerte elterjedt.” (16)

Indiában a számírás első nyomai az i. e. 3. századból, Asóka királyságának idejéből származnak. Ekkor kétféle számírás is jelen volt: a kharoshti és a brahmi. (Ez utóbbi számjegyei már nagyon hasonlítottak mai számjegyeinkre.) Mindkettő tízes csoportosítást alkalmazott, de ezek nem helyiértékesek, hanem alfabetikusok voltak. A brahmi számírásban külön jele volt az egyeseknek, a tízeseknek, a százasoknak stb., így ezzel adott volt a helyiérték kialakulásának előfeltétele. A következő fontos lépés a helyiérték és a nulla megjelenése volt. Az első erre utaló emlékek az i. u. 4–5. században született csillagászati műben, a Szúrja-Sziddhántákban lelhetők fel. (17)

A számok versbe szedésekor először az egyeseket nevezték meg, majd pedig nagyság szerinti sorrendben a tíz pozitív egész kitevős hatványait. A nullát is kiírták. Az első mai formájú szám egy 595-ből ránk maradt indiai adománylevélben szerepel: a ‘Szamvat 346’ évszámot a 346-nak megfelelő brahmi számjegyekkel írták le. (18) Az első évezred derekára kialakult Indiában a helyiértékes tízes számrendszer. Emellett a hinduk dolgozták ki számolási szabályainkat is. „A hinduktól jutott el hozzánk az a csodálatos számírási rendszer, amelyben minden szám felírható tíz jellel azáltal, hogy minden jelnek alaki- és helyiértéket tulajdonít. Ez a nagy jelentőségű és zseniális módszer olyan egyszerűnek tűnik, hogy emiatt fel sem tudjuk fogni igazán a nagyszerűségét. De éppen egyszerűsége és a műveletek könnyű elvégezhetősége helyezi ezt az aritmetikai rendszert a leghasznosabb felfedezések sorába.” (19)

Az „új” számrendszer elterjesztésének érdeme az araboké. Tudósaik a Bagdadi Kalifátus korában, *al-Manszúr* kalifa uralkodása idején ismerkedtek meg a hinduk számíráásával. A számírás térhódításában fontos szerep jutott a kereskedelemnek is (Európába Észak-Afrikán és az Ibériai-félszigeten keresztül jutott el).

Az első európai tudós, aki bizonyítottan használta és tanította (!) az új számjegyeket, a francia *Gerbert* szerzetes volt (940–1003). A római számokhoz és a velük való nehézkes számoláshoz szokott emberek barátságtalanul fogadták a hindu-arab számokat. Érthető módon leginkább a „semmi”-től, a nullától idegenkedtek. A célszerű számrendszer azonban idővel győzedelmeskedett. Ehhez nagyban hozzájárult *Leonardo da Pisa* (Fibonacci) itáliai matematikus „*Liber abaci*” című munkája, melyben összegyűjtötte az indiai és az arab számolási módszereket is. A 16. századra szinte egész Európában általánosan használttá vált a helyiértékes tízes számrendszer. (20)

Kuriózumként megemlíthető, hogy Kínában ennek a rendszernek ma három változata él párhuzamosan. A legegyszerűbb (10 számjegyű) olyan, mint amelyet mi is használunk. A legbonyolultabb, hieroglif jeleket használó számírás szintén tízes alapú, de abban minden helyiértéket a számjegy után külön-külön megneveznek. (Ezért ezt „kiírt helyiértékes” számírásnak nevezzük. Az üzleti és a hivatalos életben használják a hamisíthatóság mértékének lecsökkentésére.) A mai Kínában még egy egyszerűbb jeleket alkalmazó kiírt helyiértékes tízes rendszerű számírás is fellelhető.

Természetesen az ókori számrendszerek nem csupán a matematikatörténeti munkák szereplői napjainkban. Lépten-nyomon találkozunk velük mi is. Gondoljunk csak az 1 óra = 60 perc = 3600 (60 x 60) másodperc időmértékeinkre és máris az ősi Babilon hatvanas helyiértékes számrendszerébe pillanthatunk be. (Szintén erre utal a kör 360 fokra osztása, illetve az 1 szögperc = 60 szögmásodperc egyenlőség is.) Naptárunk távoli rokona a rég letűnt maya civilizáció által alkotott, számrendszerükhöz igazodó naptárnak.

A nyelvészet is a múlt rejtett, de jól kitaposott „számösvényeit” tárja fel előttünk. Nyelvünkben a ‘tucat’ és ‘nagytucat’ szavak, a német és az angol nyelvben pedig a „zwölf”, illetve a „twelve” kifejezések utalnak a tizenkettő egykori kitüntetett szerepére. A franciák némely számneve a húszas (80 = „quatrevingts” = „négyhúsz” és 90 = „quatre-vingts-dix” = „négy-húsz-tíz”), míg néhány másik a hatvanas számrendszer nyomait őrzi (70 = „soixante-dix” = „hatvan-tíz”).

A számrendszerek jelenlegi helye és lehetséges szerepe a matematika tanításában

A 10-es számrendszer először az általános iskola alsó tagozatában (a 3. és a 4. osztályban) bukkan fel. A 9–10 éves gyerekek természetesen nem „nevezik nevén”, hanem különböző egyszerű csoportosítási feladatokat oldanak meg. Például: „Egy diák azt a feladatot kapta, hogy állítsa elő az 5293 forintot egyforintosok, tízforintosok, százasok és ezresek segítségével. De a fenti pénzfajták mindegyikéből legfeljebb 9 darabot használhat fel. (Nem muszáj mindegyikből használni.) Hogyan oldotta meg feladatát?”

A felső tagozaton kerül sor a konkrét, a részletekre is kiterjedő vizsgálatra. Előjönnek az alapfogalmak: számrendszer, helyiérték. Szerencsés esetben ekkor megtörténik más alapszámú számrendszerek bemutatása is, hétköznapi gyakorlati ismeretekhez kapcsolódva (ilyen lehet az időmértékek tanulmányozása). Szintén ekkor vagy a középiskolában kell sort keríteni az átváltás módszerének megismerésére: átjáró nyitása a kettes és a tízes számrendszer között („Írd fel a tízes számrendszerben azt a számot, melynek kettes számrendszerbeli alakja az 11010110! Ha ez egy tízes számrendszerbeli szám, akkor hogyan nézne ki a kettes számrendszerben?”). A kettes számrendszerben is meg kell ismerni az alapvető műveleteket és azok tulajdonságait (erre jó esetben jut is idő). Sajnos, itt lezárul a számrendszerek nem túl magas ívű iskolai életútja. Csak a speciális, matematika tagozatos középiskolai osztályok és a tantárgyi szakkörök szentelnek még e témakörnek néhány órát...

Míndez igen kevés. A matematika tanításának spirális felépítését szem előtt tartva is növelhető lehetne a számrendszerek megismerésére szánt idő. A legtöbb esetben csak egy-két mondat erejéig találkozunk a diákok a múlt számrendszereivel, hiszen a pedagógusok rendszerint „fűszerezésre”, a sokszor „száraznak” tűnő tananyag színezésére használják fel

azokat. Pedig a számrendszerek mélyebb megismerésének érdekessége mellett jelentős didaktikai haszna is van, hisz fejleszti a logikai képességeket, növeli a gondolkodás rugalmasságát.

Sokan úgy vélekednek, hogy a gyermekek gondolkodási képességeinek fejlődése nagy vonalakban nyomon követi az emberiség fejlődésének bizonyos fázisait. Igaz ez a matematikai tudásra vonatkoztatva is. A gyermekek számolóképeségének fejlődése is a primitív népek számolásának fejlődési szakaszaira emlékeztető lépcsőfokokat érint. (Ezért egy természetesebb útja lehetne a 10-es helyiértékes számrendszer tárgyalásának – és így a számok megismerésének, a számolási készségek kialakításának is –, ha a matematika oktatása során először a számok csoportosítását, majd a helyiérték nélküli rendszereket, és végül a helyiértékes számrendszereket mutatnánk be a diákoknak.)

Persze az előző elképzelések többsége szinte az utópia határát súrolja. Még az is bekövetkezhet, hogy a jövő évezred végén az akkor már több mint kétezer éves helyiértékes tízes számrendszer csak egy néhány soros fejezetét fogja képezni a matematikakönyveknek. És talán ez nem utópia...

Jegyzet

- (1) FILEP LÁSZLÓ: *A tudományok királynője. A matematika fejlődése*. Bessenyei Kiadó, Nyíregyháza 1997, 36. old.; FILEP LÁSZLÓ–BEREZNAI GYULA: *A számírás története*. Gondolat Kiadó, Bp. 1982, 15. old.
- (2) Uo., 15. old.
- (3) Uo., 18. old.; ZASLAVSKY, C.: *Afrika számol*. Gondolat Kiadó, Bp. 1984.
- (4) FILEP LÁSZLÓ–BEREZNAI GYULA: *A számírás története*, i. m., 16. old.
- (5) SZERÉNYI TIBOR: *A matematika fejlődése*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp. 1994, 16. old.
- (6) WAERDEN, B. L. VAN DER: *Egy tudomány ébredése*. Gondolat Kiadó, Bp. 1977, 24–29. old.
- (7) SAIN MÁRTON: *Nincs királyi út! Matematikatörténet*. Gondolat Kiadó, Bp. 1986, 41. old.
- (8) FILEP LÁSZLÓ–BEREZNAI GYULA: *A számírás története*, i. m., 34–36. old.
- (9) WAERDEN, B. L. VAN DER: *Egy tudomány ébredése*, i. m., 23. old.
- (10) FILEP LÁSZLÓ–BEREZNAI GYULA: *A számírás története*, i. m., 50–52. old.
- (11) SZÁSZ GÁBOR: *A matematika fejlődése*. Tankönyvkiadó, Bp. 1971; FILEP LÁSZLÓ: *A tudományok királynője*, i. m.; RIBNYIKOV, K. A.: *A matematika története*. Tankönyvkiadó, Bp. 1968.
- (12) STAAR GYULA: *Hogyan születtek a számok?* Bp. 1978, 10–11. old.; SAIN MÁRTON: *Nincs királyi út!...*, i. m., 19. old.
- (13) FILEP LÁSZLÓ–BEREZNAI GYULA: *A számírás története*, i. m., 76. old.
- (14) Uo., 80. old.
- (15) FILEP LÁSZLÓ: *A tudományok királynője*, i. m., 38–39. old.
- (16) SAIN MÁRTON: *Nincs királyi út!...*, i. m., 357. old.
- (17) FILEP LÁSZLÓ–BEREZNAI GYULA: *A számírás története*, i. m., 91. old.
- (18) SAIN MÁRTON: *Nincs királyi út!...*, i. m., 359. old.
- (19) FILEP LÁSZLÓ–BEREZNAI GYULA: *A számírás története*, i. m., 93. old.
- (20) RIBNYIKOV, K. A.: *A matematika története*, i. m., 96–100. old.